भाग - 3

गणित का शिक्षण

RH

विकास समूह

1 बी.एस. उपाध्याय, प्रोफेसर, आरआईई. मैसूर

2. जी.पी. दीक्षित, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), लखनऊ विश्वविद्यालय, लखनऊ

3. हुकुम सिंह, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), डीईएसएम, एनसीईआरटी, नई दिल्ली

4. ज्योती शर्मा, असिस्टैंट प्रोफेसर, एसपीएम कालेज, नई दिल्ली

5. महेन्द्र शंकर, प्रवक्ता (एसजी)(सेवानिवृत्त), एनसीईआरटी, नई दिल्ली

6. राम अवतार, प्रोफेसर, (सेवानिवृत्त), डीईएसएम, एनसीईआरटी, नई दिल्ली

7. आर.पी. मौर्या, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), डीईएसएम, एनसीईआरटी, नई दिल्ली (सदस्य समन्वयक अंग्रजी संस्करण)

8. वंदिता कालरा, सह प्राचार्य, जीजीएसएसएस, नई दिल्ली

9. वी.पी. सिंह, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), डीईएसएम, एनसीईआरटी, नई दिल्ली

हिन्दी अनुवादक

1. डी.आर. शर्मा, प्रधानाचार्य, ज.न.वि. जालन्धर
2. महेन्द्र शंकर, प्रवक्ता (एसजी)(सेवानिवृत्त), एनसीईआरटी, नई दिल्ली
3. वी.पी. सिंह, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), डीईएसएम, एनसीईआरटी, नई दिल्ली

समीक्षा एवं संपादन समूह

1. ए.के. वझलवार, प्रोफेसर एवं विभागाध्यक्ष, डी.ई.के. एनसीईआरटी, नई दिल्ली
2. आर.पी. मौर्या, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), डीईएसएम, एनसीईआरटी, नई दिल्ली
3. डी.आर. शर्मा, प्रधानाचार्य, ज.न.वि. जालन्धर
4. महेन्द्र शंकर, प्रवक्ता (एसजी)(सेवानिवृत्त), एनसीईआरटी, नई दिल्ली
5. राम अवतार, प्रोफेसर, (सेवानिवृत्त), डीईएसएम, एनसीईआरटी, नई दिल्ली
6. शिव शरण यादव, टी.जी.टी. गणित, ज.न.वि. बलरामपुर
7. वी.पी. सिंह, प्रोफेसर (सेवानिवृत्त), डीईएसएम, एनसीईआरटी, नई दिल्ली
8. यशपाल वर्मा, उप निदेशक (सेवानिवृत्त), डी.ए.वी. प्रबन्ध समिति

समन्वयक

आशीष कुमार श्रीवास्तव, असिस्टेंट प्रोफेसर, डीईएसएम, एनसीईआरटी, नई दिल्ली

0

परिचय

प्रस्तावना

एक गणित शिक्षक को एक महान अवसर प्राप्त है। यदि वह अपने निर्धारित समय को नियमित संक्रियाओं में अपने विद्यार्थियों से अभ्यास कराने में व्यतीत करता है, तो वह उनकी रूचि को नष्ट करता है, उनके बौद्धिक विकास में बाधा डालता है तथा अपने अवसर का दुरुपयोग करता है। परंतु यदि वह अपने विद्यार्थियों की उत्सुकता को उनके ज्ञान के अनुरूप समस्याएं प्रस्तुत करके चुनौती देता है तथा उत्प्रेरक प्रश्नों के साथ उनकी समस्याओं को हल करने में उनकी सहायता करता है, तो वह उन्हें स्वतंत्र चिंतन का एक अहसास करा सकता है तथा उसके कुछ साधन प्रदान कर सकता है।

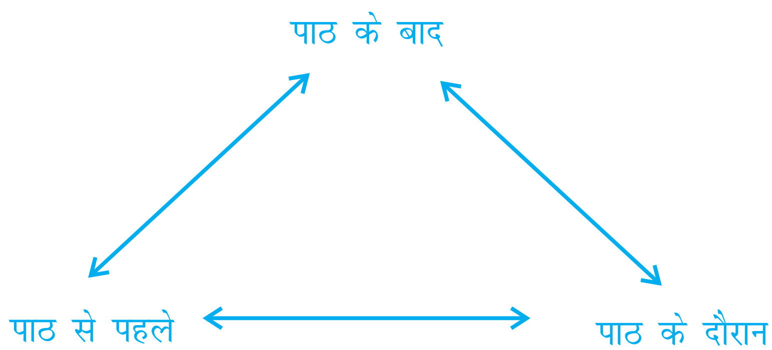
(जी पोल्या)

अधिकतर हम तर्क देते हैं कि गणित में भ्रांत अवधारणाएँ अप्रभावी शिक्षण के परिणामस्वरूप उत्पन्न होती हैं। यह हो सकता है कि विद्यार्थियों को उस अवधारणा के अनुमोदन के लिए चर्चा और गणितीय विवेचन पर प्रतिक्रिया व्यक्त करने के पर्याप्त अवसर न मिल पाए हों। प्रभावी कठिनाई जो अभी भी रह जाती है वह है कि कुछ गणितीय गलतियाँ पूरे विश्व में की जाती हैं, चाहे वहाँ कोई सी भी पाठ्यचर्या और शिक्षाशास्त्र संबंधी युक्तियाँ अपनाई गई हों। हमें यह समझना चाहिए कि शिक्षार्थी, अपने पिछले अनुभवों के आधार पर, गणित के लिए स्वंय अपने अर्थ और अपनी संरचनाएँ रचित करते हैं।

गणित शिक्षण एक चुनौती तथा एक प्रेरणात्मक प्रयास दोनों ही हैं। नई अंतर्दृष्टि और नए अनुभव शिक्षकों की उनके द्वारा अपनाए जाने वाले शिक्षाशास्त्र की विश्वसनीय पद्धति की जाचँ करने में सहायता करते हैं। गणित की अमूर्त प्रकृति ने अनिवार्य रूप से शिक्षकों को इसके लिए बाध्य किया है कि वे गणितीय विचारों तथा उनके निहित अवधारणात्मक संरचना को शिक्षार्थियों द्वारा समझने में सहायता करने के लिए शिक्षाशास्त्र और संसाधनों की पुन: संरचना करें। वर्तमान मॉड्यूल माध्यामिक स्तर पर पढ़ाए जाने वाली महत्वपूर्ण गणितीय अवधारणाओं के पुनर्गमन पर एक प्रयत्न है। कुछ विशिष्ट भ्रांत अवधारणाओं और विद्यार्थियों द्वारा अधिकतर की जाने वाली त्रुटियों तथा उनके संभव कारणों के बारे में माध्यमिक स्तर के गणित शिक्षकों से प्राप्त संक्षिप्त समीक्षा के उपरांत, यह महत्वपूर्ण समझा गया कि इन अवधारणाओं पर पुनर्गमन करने तथा अधिक आकर्षक और प्रभावी शिक्षाशास्त्र का उपयोग करने में शिक्षकों की सहायता करने के लिए एक ब्रिज (सेतु) मॉड्यूल विकसित किया जाए।

गणित शिक्षण की प्राय: मौलिक तथ्यों, नियमों और सूत्रों को रटने पर बल दिए जाने पर आलोचना की जाती है। यह सदैव सुझाव दिया जाता है कि गणितीय विवेचन तथा अनुप्रयोग, विश्लेषण, संश्लेषण, मूल्यांकन और रचना जैसे उच्च क्रम के चिंतन कौशलों पर बल दिया जाना चाहिए (ब्लूम की संशोधित टैक्सोनॉमी।

गणितीय अवधारणाएँ प्रकृति से अमूर्त हैं तथा इनकी अर्थपूर्ण रचना में शिक्षार्थियों की सहायता करना शिक्षकों के लिए सदैव ही चुनौतीपूर्ण रहा है। गणित शिक्षण के लिए, अवधारणाओं के बारे में चिंतन, शिक्षार्थी केन्द्रित शिक्षाशास्त्र तथा विविधतापूर्ण रचनात्मक मूल्यांकन की आवश्यकता है। शिक्षण का कार्य एक तीन चरणीय प्रक्रिया है :



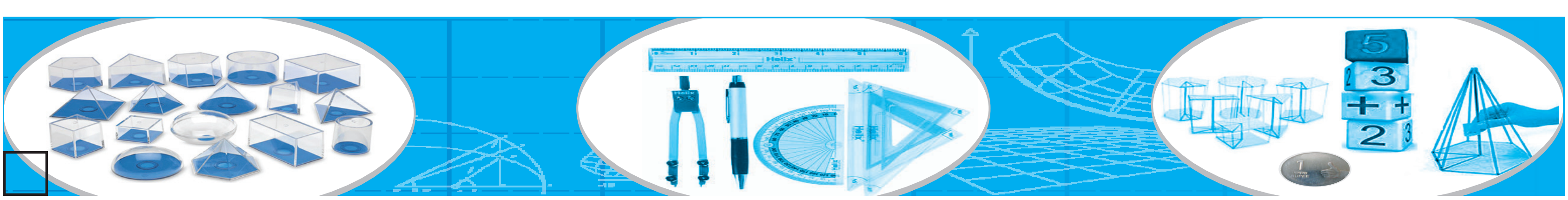
यह एक रैखिक प्रक्रिया नही है। प्रत्येक चरण अन्य दो को जोड़ने की कड़ी तथा पुनर्निवेशन प्रदान करता है। शिक्षक को शिक्षार्थी की प्रकृति तथा अवधारणा की प्रकृति का संज्ञान होना चाहिए। गणितीय विचार एक पाठ के परिणाम के रूप में नही सीखे जाते हैं। बल्कि ये पिछले गणितीय अनुभवों का एक संचय होता है। गणित के प्रति चिंता (या व्यग्रता) एक अन्य कारण है, जो गलत गणित अधिगम के लिए योगदान देता है। क्योंकि गणित शिक्षण पहले से सीखे गए गणितीय ज्ञान के लिए तथा भविष्य के गणित अधिगम के बारे में निर्णय लेने के लिए सीधा उत्तरदायी है, इसलिए पूर्व में सीखी गई गणितीय अवधारणाओं की सही और ठोस आधारशिलाएँ विद्यार्थियों के ज्ञान के अर्थपूर्ण विस्तार में एक शिक्षक की एक उपयुक्त युक्ति की योजना बनाने में सहायता कर सकती है।

शिक्षार्थी के विश्वास को गणित के प्रति इस प्रकार ढालना चाहिए की एक सकारात्मक सोच जनित हो। विद्यार्थियों को गणितीय अवधारणाओं की समझ में व्यस्त रखने के लिए, शिक्षकों को इन अवधारणाओं का ठोस ज्ञान होना आवश्यक है। शिक्षक समस्या हल करने के विभिन्न पहलुओं के आदर्श प्रस्तुत कर सकता है तथा विद्यार्थियों को उस अवधारणा से संबंधित क्रियाकलाप और चर्चाएँ कराने में व्यस्त रख सकता है।

प्रभावी गणित शिक्षण का उद्देश्य विद्यार्थियों में गणित के प्रति आत्मविश्वास तथा गणित करने के लिए उत्सुकता, स्वतंत्रता और विश्वास स्थापित करना है।

एन सी टी एम (1991) का व्यावसायिक शिक्षण मानक गणित शिक्षकों की भूमिका को निम्न रूप में परिभाषित करता है :

(a) अवधारणाओं, प्रक्रियाओं और दृढ़ विश्वास का शिक्षण देना।
(b) गणितीय समस्या हल करने, विवेचन और दृढ़ विश्वास को बढ़ावा देना।
(c) विद्यार्थियों की गणितीय प्रवृत्तियों को उत्साहित करना।



(d) विद्यार्थियों की गणित की समझ का मूल्यांकन करना।

(e) एक ऐसा अधिगम परिवेश रचित करना जो प्रत्येक बच्चे की गणितीय शक्ति के विकास को बढ़ावा दे। गणित शिक्षण के लिए आवश्यक है कि शिक्षार्थियों द्वारा नई अवधारणात्मक संरचनाएँ रचित करने तथा विद्यमान संरचनाओं को आगे विस्तृत करने की क्षमता को जगाने में उनकी सहायता करने के लिए बेहतर प्रकार से तैयार रहना। इसे प्रभावी रूप से करने के लिए शिक्षक को

- इसका संज्ञान होना चाहिए कि शिक्षार्थी किस प्रकार गणित की संरचना करता है।
- परस्पर संबंधित गणितीय अवधारणाओं से परिचित होना चाहिए।
- ऐसी बहु- प्रभावी युक्तियों और क्रियाकलापों से सुसज्जित होना चाहिए, जिनसे गणितीय ज्ञान को बच्चों द्वारा देखने, खोजने और संचारित करने में सहायता मिल सके।
- विकास के स्तर का मूल्यांकन करने तथा भ्रांत अवधारणाओं को दूर करने हेतु निदानात्मक योजना बनाने में समर्थ होना चाहिए।

पिछले कुछ दशकों में, विद्यार्थियों द्वारा की जाने वाली गणितीय त्रुटियों तथा उनमें शिक्षण-अधिगम प्रक्रिया के दौरान विकसित भ्रांत अवधारणाओं के पुनरूत्थान की ओर व्यक्तियों में रुचि उत्पन्न हुई है। यद्यपि भ्रांत अवधारणाओं पर पुन: विचार करना गणितीय प्रोग्रामों का सदैव एक अभिन्न अंग रहा है, परंतु इसे सदैव एक संभव निदानात्मक योजना के संकुचित अर्थ के रूप में ही देखा जाता रहा है। कुछ समय पहले ही, शिक्षार्थियों के संज्ञान, गणितीय चिंतन और जाँच को समझने में, अनुसंधान ने भ्रांत अवधारणाओं के महत्व पर पुन: बल दिया है।

वर्तमान प्रशिक्षण मॉड्यूल गणितीय अवधारणाओं की अर्थपूर्ण रचना में विद्यार्थियों को व्यस्त रखने के लिए, शिक्षण-अधिगम विचारों के बारे में है। यह निर्णायक गणितीय अवधारणाओं की पुनर्रचना के लिए विद्यार्थियों के उत्तरों से गणित शिक्षकों को हल योजनाएँ खोजने में सशक्त बनाने के बारे में भी है।

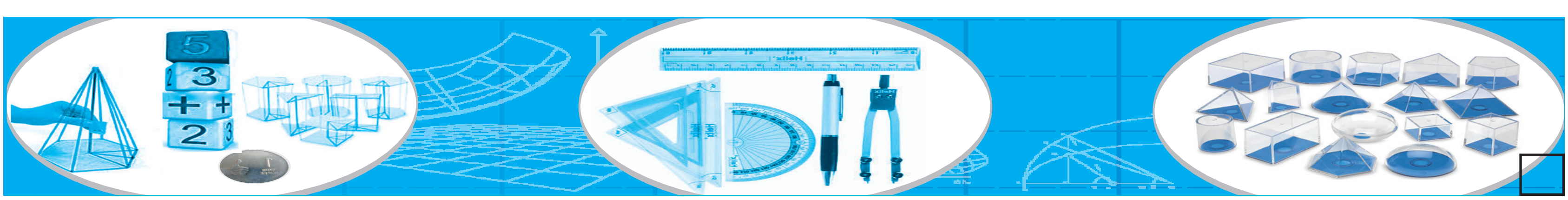
माध्यमिक स्तर पर महत्वपूर्ण गणित

गणितीय रूप से साक्षर होने में गणित के मूल्य और सुंदरता की सराहना करना सम्मिलित है तथा साथ ही परिणात्मक सूचना का आकलन और प्रयोग करने में समर्थ होना और इस ओर झुकाव होना भी सम्मिलित है। गणितीय शक्ति ''खोजने, अनुमान लगाने तथा तार्किक विवेचन करने की सामर्थ्य तथा साथ ही अनुमान अनियमित समस्याओं को हल करने में विभिन्न प्रकार की गणितीय विधियों को प्रभावी रूप से प्रयोग करने के सामर्थ्य तथा आत्मविश्वास और ऐसा करने के साक्ष्य'' सम्मिलित करती है।

(एन सी टी एम 1989)

विद्यार्थी में गणितीय शक्ति विकसित करने में समर्थ होने के लिए पाठ्यचर्या और शिक्षाशास्त्र में एक संतुलन की आवश्यकता है ताकि कक्षा का कमरा गणितीय विचारों को बढ़ावा देने के लिए विद्यार्थियों को बौद्धिक क्रियाकलापों में व्यस्त रखने हेतु सुसज्जित हो जाए।

माध्यमिक स्तर के गणित में, विभिन्न विषयों संबंधी व्यवस्थाएँ हैं, जैसे बीजगणित, ज्यामिति और प्रायिकता, परन्तु ये सभी बल पड़ी हुई रस्सियाँ अंत में पूर्णतया अंतरसंयोजित हो जाती हैं। इन अंतरसंयोजनों



को संसाधनपूर्ण शिक्षण द्वारा प्रभावी रूप से बुनना चाहिए। एक सुसंगत पाठ्यचर्या महत्वपूर्ण गणितीय विचारों की रचना करने तथा उन्हें एकीकृत करने में सहायता करती है ताकि और अधिक संशोधित अवधारणात्मक संरचनाएँ निर्मित हो सकें।

माध्यमिक वर्ष, परिवर्तन का एक चरण है, जब शिक्षार्थी अधिक महत्वाकांक्षी, स्वतंत्र, खोजने वाला और परावर्ती हो जाता है। माध्यमिक गणित पाठ्यचर्या को विद्यार्थियों को इसमें समर्थ बनाना चाहिए कि वे बीजगणित, ज्यामिति, प्रायिकता, सांख्यिकी में जो जोड़ने वाली कड़ी है उसे देख पाएँ तथा गणितीय विचारों को विभिन्न विधियों से निरूपित करने को भी देख पाएँ। उन्हें अधिक आकर्षक नवीनतम और अंतर्दृष्टि समय के माध्यम से गणितीय पदों में, कल्पना करने, निरूपित करने और अनुभवों का विश्लेषण करने में अपनी सामर्थ्यों में वृद्धि करनी चाहिए।

माध्यमिक गणित पाठ्यचर्या के उद्देश्य हैं कि विद्यार्थियों को बेहतर शैक्षिक व्यावसायिक/सामाजिक विकल्पों के लिए आवश्यक महत्वपूर्ण गणित से भली-भाँति सुसज्जित किए जाने के अवसर प्रदान किए जाएं। यह विद्यार्थियों को नई स्थितियों से अन्वेषन करने, उनके अर्थ बनाने तथा उनसे गणितीय अर्थपूर्ण रचना करने के लिए सशक्त बनाता है।

माध्यमिक गणित पाठ्यचर्या को विद्यार्थियों के लिए एक पथमानचित्र प्रदान करना चाहिए ताकि वे अपनी जीवन-चर्या की रुचियों और शैक्षिक विकल्पों की खोज कर सकें।

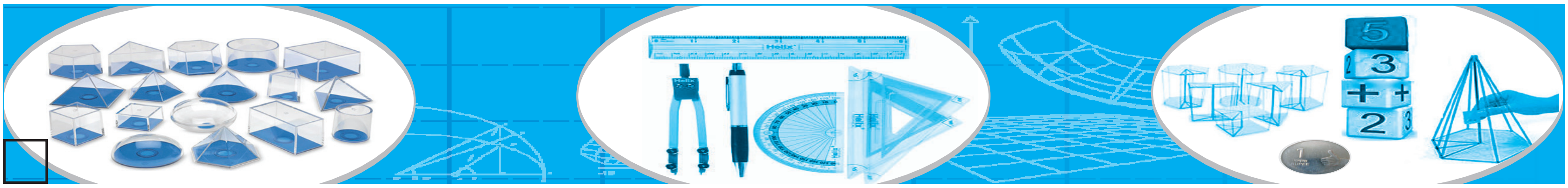
वर्तमान मॉड्यूल का उदेश्य शिक्षकों की निम्न सामर्थ्यों को सुदृढ़ करना है :

- महत्वपूर्ण विषयक कडियों के शिक्षण के लिए, उचित युक्तियों और संसाधनों का प्रयोग करना।
- विद्यार्थियों में स्पष्टता और रुचि को बढ़ावा देने के लिए उपयुक्त गणितीय कार्य चुनना/रचित करना।
- महत्वपूर्ण गणितीय अवधारणाओं की स्वाभाविकता, अर्न्तनिहित और सुसंगतता के लिए रूपरेखा की पुन: रचना करना।
- विद्यार्थियों की गणित की समझ का मूल्यांकन करने के लिए नए संशोधित साधन प्रयोग करना।
- गणित शिक्षकों में विचारों और अनुभवों के परावर्तन और व्यावसायिक विनिमय को बढ़ावा देना।

आदर्श रूप से, विद्यार्थियों को यह अर्थ समझ आ जाना चाहिए कि उन्हें क्या पढ़ाया जा रहा है। जैसे-जैसे विद्यार्थी प्रारंभिक स्कूली वर्षों से सीनियर ग्रेडों में जाते हैं, उन्हें विचारों की एक पद्धति के रूप में, परिमाण निर्दिष्ट करने वालों के रूप में, संचार और निरूपण के एक साधनों के रूप में संख्याओं की एक गहन समझ विकसित कर लेनी चाहिए। मानसिक युक्तियों को प्रकट करने के लिए, अभिकलनात्मक प्रवाह में एक धीरे-धीरे प्रगति तथा वैकल्पिक कलन विधियाँ विद्यार्थियों को अधिक विश्वसनीय और विचारात्मक बनाने के लिए महत्वपूर्ण है।

बीजगणित गणितीय विचारों को संचारित करने के लिए, गणित की भाषा है। यह मूल संदर्भ के बाहर जाकर अवधारणाओं को अमूर्त करने तथा व्यापकीकरण करने की एक विधि है। यह शिक्षार्थियों को गणितीय अमूर्तों, सांकेतिकता और व्यापकीकरण की शक्तियों की सराहना करने मे समर्थ बनाता है।

ज्यामिति माध्यमिक गणित पाठ्यचर्या में महत्वपूर्ण स्थान रखती है, जहाँ विद्यार्थी अभिगृहीतात्मक संरचना और ज्यामितीय उपपत्तियों की शक्ति की सराहना करना सीखते हैं। एक भली-भाँति सुसज्जित शिक्षक विद्यार्थियों के अनुमानों को खोजने तथा तर्कण को सुदृढ बनाने में सहायता कर सकता है।



गणित में सबसे अधिक सार्थक परिवर्तन ज्यामिति को बीजीय पद्धति के रूप में समझना है। ज्यामिति और बीजगणित के बीच में पारस्परिक क्रिया विद्यार्थियों की कल्पना करने, सूत्रित करने तथा इन पद्धतियों के बीच में परिवर्तन करने की क्षमता को सुदृढ़ बनाती है।

त्रिभुजों के मापन के अध्ययन के रूप में त्रिकोणमिति नौकाचालन और सर्वेक्षण के क्षेत्रों से अनेक वास्तविक शब्द समस्याओं के लिए एक अपरिहार्य यंत्र है। यह परिशुद्ध रूप से किसी समकोण त्रिभुज की भुजाओं और कोणों के परिभाषित अनुपातों पर आधारित है। वैज्ञानिक रूप से परिभाषित ये अनुपात अनेक सर्वसमिकाएँ रचित करते हैं, जो प्रचुर त्रिकोणमितीय अनुप्रयोगों से संबद्ध होती हैं।

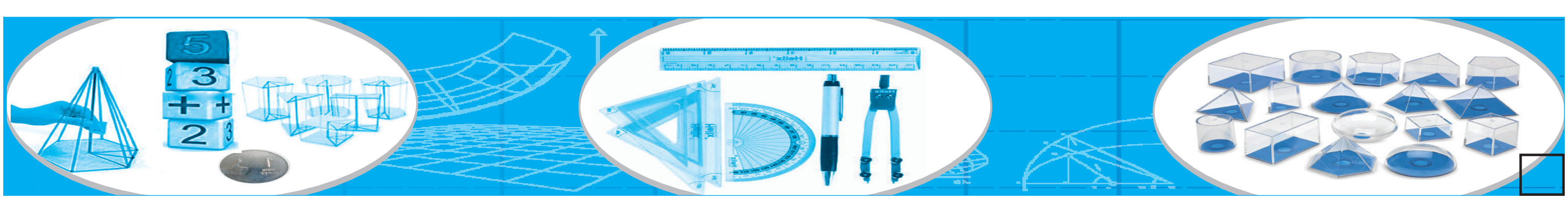
दैनिक जीवन में, सूचनाओं को साँराशित करने, उनका विश्लेषण और रूपांतरण करने के लिए, आंकड़े संसार पर राज करते हैं। अर्थपूर्ण निष्कर्ष निकालने के लिए, आँकड़े का संग्रह, संघटन, निरूपण और निर्वाचन महत्वपूर्ण हैं। पाठ्यचर्या के एक अंग के रूप में सॉख्यिकी को गणितीय परिशुद्धता और सांख्यिकीय सन्निकटता के बीच अंतरों की सराहना करने में विद्यार्थियों की सहायता करनी चाहिए।

अंतर संबंधित अवधारणाओं के एक एकीकृत पिंड के रूप में, विद्यार्थियों के लिए गणित को एक उच्च –स्तरीय मान का विषय होना चाहिए। इसके लिए परावर्तन अभ्यासों में निरंतर व्यस्त व्यवसाय की ओर झुकाव वाले गणित शिक्षकों के सही दृष्टिकोण की आवश्यकता है।

प्रशिक्षण पैकेज का विकास तथा मास्टर प्रशिक्षकों की शिक्षा

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा (एन सी एफ) – 2005 सुझाव देता है कि रचनात्मक अधिगम सिद्धांत पर आधारित रचनात्मक तकनीकों पर मुख्य केन्द्रित होने के साथ शिक्षण-अधिगम के अभिगम में संपूर्ण परिवर्तन होना चाहिए। यह सिद्धांत इस बात पर विश्वास रखता है कि अधिगम सदैव बच्चे में पहले से विद्यमान ज्ञान के आधार पर निर्मित किया जाता है। अधिगम तभी अधिक प्रभावी होता है, जबकि शिक्षार्थी अधिगम प्रकिया में सक्रिय रूप से व्यस्त रहे, न कि उस स्थिति में जब वह निष्क्रिय रूप से ज्ञात प्राप्त करता है। एन सी एफ- 2005 पर आधारित एन सी ई आर टी द्वारा विकसित पाठ्यपुस्तकें इस बदलाव के साथ लिखी गई हैं। गणित के शिक्षण पर एन सी एफ-2005 की संस्तुतियाँ हैं:

- संख्यांकन से संबधित संकुचित लक्ष्यों को प्राप्त करने के केन्द्र -बिन्दु को बच्चे के चिंतन, विचारों की स्पष्टता तथा कल्पनाओं को तार्किक निष्कर्षो तक पहुँचाने (यह एक योग्यता है जिसे गणित शिक्षक को शिक्षार्थी के अंदर निर्मित किए जाने की आवश्यकता है, ताकि वह अमूर्तनों को व्यवस्थित रख सके) के आंतरिक संसाधनों को विकसित करने के उच्चतर लक्ष्यों पर स्थानांतरित करना। स्मृति से तकनीकों को याद करने के स्थान पर यह समझना कि एक गणितीय तकनीक को कब और कैसे उपयोग किया जाना है। गणित के अधिगम को शिक्षार्थी के जीवन अनुभव का एक भाग बनाना चाहिए। शिक्षार्थी अर्थपूर्ण समस्याओं को प्रस्तुत करने तथा उन्हें हल करने में समर्थ हो जाना चाहिए। गणितीय अधिगम की अवधि में समस्या हल करने का एक कौशल के रूप में विकास अति मूल्यवान है।
- प्रत्येक विद्यार्थी को सफलता के एक बोध के साथ व्यस्त रखना, जबकि इसके साथ ही गणितीय रूप से प्रतिभाशाली बच्चों के लिए अवधारणात्मक चुनौतियाँ प्रस्तुत करना।
- शिक्षकों को विभिन्न प्रकार के गणितीय संसाधनों से संवर्धित करना।



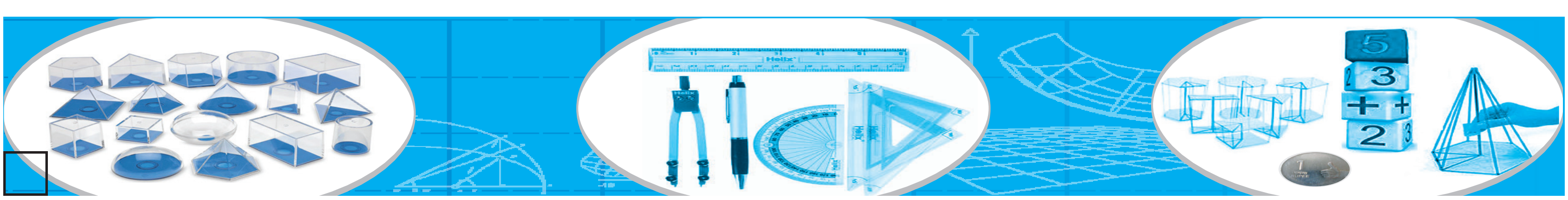
एन सी एफ- 2005 पर आधारित पाठ्यपुस्तकों के विकास के उपरांत, केन्द्रीय विद्यालय संगठन, नवोदय विद्यालय समिति तथा हरियाणा राज्य से चुने गए शिक्षकों को मास्टर प्रशिक्षकों के रूप में, आमने – सामने की विधि द्वारा, इन पाठ्यपुस्तकों के प्रयोग के विषय में प्रशिक्षित किया गया। कुछ शिक्षकों को टेलीकान्फ्रेसिंग विधि द्वारा भी प्रशिक्षित किया गया। यह अपेक्षा की गई थी कि केवीएस, एनवीएस और हरियाणा सरकार इन मास्टर प्रशिक्षकों की सहायता से शिक्षकों के लिए आगे के प्रशिक्षण आयोजित करेंगे। परंतु ऐसा प्रतीत होता है कि ऐसा एक बड़े पैमाने पर साकार नही हो पाया है।

माध्यमिक स्तर पर गणित की वर्तमान पाठ्यपुस्तकें लगभग 5 वर्षों से प्रयोग की जा रही हैं। अब एन सी ई आर टी ने माध्यमिक स्तर के लिए गणित में प्रश्न प्रदर्शिकाएँ तथा साथ ही प्रयोगशाला मैनुयल भी विकसित कर लिए हैं । एन सी एफ- 2005 के आशयों पर आधारित, माध्यमिक स्तर पर गणित शिक्षण में शिक्षकों के मार्गदर्शन के लिए, प्रशिक्षण कार्यक्रमों को आयोजित करने की आवश्यकता है और इसी कारण इन कार्यक्रमों के आयोजनों में सुविधा के लिए प्रशिक्षण पैकेज को विकसित करने की आवश्यकता है। यह कार्य एक प्रशिक्षण पैकेज को विकसित करने तथा बाद में केवीएस, एनवीएस और विभिन्न राज्यों द्वारा अपने कक्षा शिक्षकों के लिए आयोजित किए जाने वाले प्रशिक्षण कार्यक्रमों में इस प्रशिक्षण पैकेज का प्रयोग किए जाने वाले चुने हुए मास्टर प्रशिक्षकों को प्रशिक्षित करने के लिए एक प्रयास है। इस प्रशिक्षण पैकेज में यह अपेक्षा की गई है कि इसमें शिक्षकों के लिए प्रदर्शकों के रूप में, व्यापक रूप से गणित शिक्षण के लिए तथा विशिष्ट रूप से कुछ चुने हुए गणितीय विषयों के लिए शिक्षण युक्तियाँ सम्मिलित हों। यह प्रशिक्षण पैकेज अवधारणाओं, व्यापकीकरण और अनुप्रयोगों की शिक्षण – अधिगम प्रक्रिया में शिक्षणों के लिए पहचान की गई प्रशिक्षण आवश्यकताओं पर आधारित होगा तथा इसमें शिक्षार्थियों में समस्या हल करने की सामर्थ्य विकसित करना तथा साथ ही गणित अधिगम का मूल्यांकन भी सम्मिलित होगा।

शिक्षकों की प्रशिक्षण आवश्यकताओं की पहचान के लिए, एक प्रश्नावली विकसित किया गया तथा उसे उपरोक्त पाठ्यसामग्री के उपयोग करने वालों को भेजा गया। उनके उत्तरों का विश्लेषण किया गया तथा माध्यमिक स्तर पर गणित शिक्षण के लिए कठिन बिन्दुओं की पहचान की गई। इन पहचाने गए कठिन बिन्दुओं पर बारीकी से चर्चा की गई तथा जुलाई 29- 31, 2011 के दौरान 3 दिवसीय एक योजना बैठक में प्रशिक्षण आवश्यकताओं को अंतिम रूप दिया गया। प्रशिक्षण पैकेज की डिज़ाइन संरचना और उसके आरूप पर भी चर्चा की गई और उन्हें अंतिम रूप दिया गया। पैकेज की विभिन्न इकाइयों के लेखकों की भी पहचान की गई ताकि वे इकाइयों के विकास के लिए प्रारंभिक तैयारी कर सकें। इस पैकेज का ड्राफ्ट कार्यशाला विधि द्वारा अक्टूबर 10-13, 2011 के दौरान विकसित किया गया। इस ड्राफ्ट का संपादन दिसम्बर 20-24, 2011 के दौरान एक 5 दिवसीय कार्यशाला में किया गया। अंत में, एन आई ई परिसर, एन सी ई आर टी, नई दिल्ली में फरवरी 13-17, 2012 के दौरान प्रशिक्षण कार्यक्रम आयोजित किया गया। इस प्रशिक्षण के आधार पर, इस ड्राफ्ट की समीक्षा की गई तथा इसे वित्तीय वर्ष 2012-13 में,आर एम एस ए के उपयोग के लिए संपादित किया गया। प्रशिक्षण पैकेज अब वर्तमान स्वरूप में तैयार है।

इस प्रशिक्षण पैकेज में नीचे दी हुई इकाइयाँ सम्मिलित हैं :

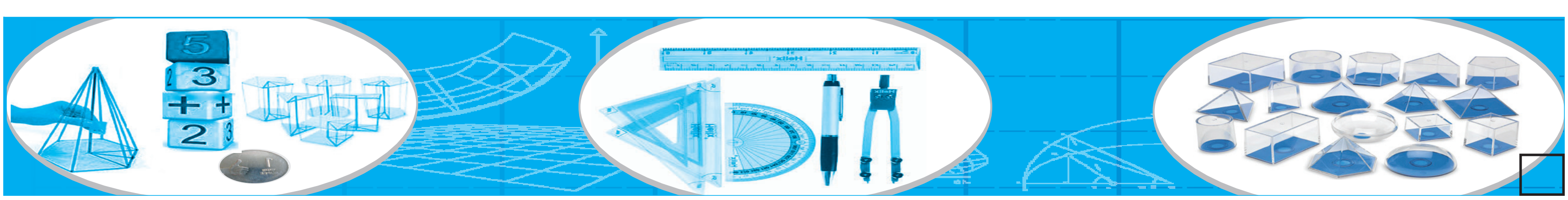
0. परिचय
1. संख्या पद्धतियों का शिक्षण
2. बीजगणित का शिक्षण



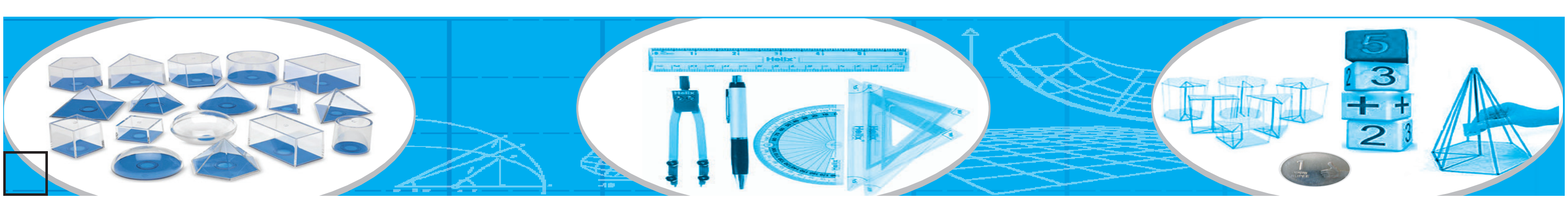
3. ज्यामिति का शिक्षण
4. क्षेत्रमिति का शिक्षण
5. साँख्यिकी और प्रायिकता का शिक्षण
6. गणित में समस्या हल करना
7. शैक्षिक मूल्यांकन की अवधारणा
8. गणित अधिगम का मूल्यांकन

यह सुझाव दिया जाता है कि इस प्रशिक्षण पैकेज का प्रयोग करते हुए, शिक्षकों के लिए प्रशिक्षण कार्यक्रमों को आयोजित करते समय,कार्यक्रम की शुरूआत एन सी एफ-2005 और गणित शिक्षा के लिए उसकी संस्तुतियों के एक सत्र से होनी चाहिए तथा एक सत्र माध्यमिक स्तर के गणित शिक्षण पर एन सी एफ – 2005 के प्रभावों पर होना चाहिए। इन दो सत्रों के बाद, पहचान किए गए गणित के पाँच क्षेत्रों में से प्रत्येक की व्यापक युक्तियों तथा इन क्षेत्रों मे चुने गए कुछ विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शकों के लिए एक-एक सत्र होना चाहिए। इन क्षेत्रों में से प्रत्येक से कुछ चुने हुए विषयों पर प्रतिभागी शिक्षकों द्वारा प्रदर्शक विकसित कराए जाने के लिए एक-एक सत्र रखा जाना चाहिए तथा प्रत्येक के लिए उनके प्रस्तुतीकरण और चर्चा के लिए एक सत्र रखना चाहिए। समस्या हल करने तथा गणित अधिगम के मूल्यांकन में से प्रत्येक के लिए दो सत्र रखे जा सकते हैं। एक सत्र प्रतिभागी शिक्षकों द्वारा संपन्न हुए प्रशिक्षण कार्यक्रम पर उनके विचार और प्रतिक्रिया व्यक्त करने के लिए (फीडबैक) रखा जा सकता है। उपरोक्त को दृष्टिगत रखते हुए, प्रशिक्षण कार्यक्रम के लिए, उदाहरणार्थ समय-सारणी नीचे दी जा रही है :

दिन	**9.00 am से 10.15 am**	**10.30 pm से 11.45pm**	**12.00 pm से 1.15pm**	**2.15 pm से 3.30pm**	**3.45 pm से 5.15 pm**
दिन 1	रजिस्ट्रेशन/उद्घाटन	एन सी एफ 2005 और उसकी संस्तुतियाँ	माध्यमिक स्तर के गणित शिक्षण पर एन सी एफ- 2005 का प्रभाव	संख्या पद्धतियों का शिक्षण तथा संख्या पद्धतियों के कुछ विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शक	प्रतिभागियों द्वारा संख्या पद्धतियों के चुने हुए विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शकों का विकास
दिन 2	गणित में समस्या हल करना	प्रतिभागियों द्वारा संख्या पद्धतियों के शिक्षण पर विकसित प्रदर्शकों का प्रस्तुती-करण	बीजगणित का शिक्षण तथा बीजगणित के कुछ विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शक	प्रतिभागियों द्वार बीजगणित के चुने हुए विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शकों का विकास	प्रतिभागियों द्वारा बीजगणित के शिक्षण पर विकसित प्रदर्शकों का प्रस्तुवतिकरण
दिन 3	गणित अधिगम का मूल्यांकन	समस्या हल करने पर समूह कार्य	ज्यामिति का शिक्षण तथा ज्यामिति के कुछ विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शक	प्रतिभागियों द्वारा ज्यामिति के चुने हुए विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शकों का विकास	प्रतिभागियों द्वारा ज्यामिति के शिक्षण पर विकसित प्रदर्शकों का प्रस्तुतीकरण



दिन 4	क्षेत्रमिति का शिक्षण तथा क्षेत्रमिति के कुछ विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शक	प्रतिभागियों द्वारा क्षेत्रमिति के कुछ चुने हुए विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शकों का विकास	प्रतिभागियों द्वारा क्षेत्रमिति के शिक्षण पर विकसित प्रदर्शकों का प्रस्तुतीकरण	गणित अधिगम के मूल्यांकन पर समूह कार्य
दिन 5	सांख्यिकी और प्रायिकता का शिक्षण तथा सांख्यिकी और प्रायिकता के कुछ विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शक	प्रतिभागियों द्वारा सांख्यिकी और प्रायि-कता के कुछ चुने हुए विषयों के शिक्षण पर प्रदर्शकों का विकास	प्रतिभागियों द्वारा सांख्यिकी और प्रायिकता के शिक्षण पर विकसित प्रदर्शकों का प्रस्तुतीकरण	मूल्यांकन और फीडबैक



1

संख्या पद्धति का शिक्षण

1.1 भूमिका :

क्या आपने कभी सोचा है कि हम प्राय: वस्तुओं को गिनने के लिए जिन संख्याओं का प्रयोग करते हैं वे कितने प्रकार की होती हैं? इस उद्देश्य के लिए हम संख्याएँ 1, 2, 3 इत्यादि का प्रयोग करते हैं। ये संख्याएँ गिनती अथवा प्राकृत संख्याएँ कहलाती हैं। क्या आपको कभी आश्चर्य हुआ कि ये संख्याएँ कहाँ से आई?

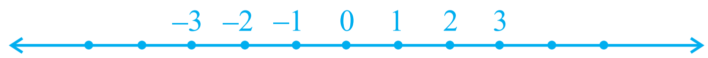
प्रागैतिहासिक मनुष्यों को संख्याओं की कुछ आवश्यकता थी। यद्यपि, जैसे – जैसे उनकी सम्पत्ति की मात्रा बढ़ने लगी, तो उन्होनें अपनी वस्तुओं का रिकार्ड रखने के लिए कुछ अशोधित विधियों का प्रयोग करना प्रारंभ किया। उदाहरणार्थ, सुबह के समय जब किसी व्यक्ति की भेड़ें जंगल में घास चरने के लिए जाती थी तो वह प्रत्येक भेड़ के लिए एक पत्थर का टुकड़ा रख देता था और इस प्रकार पत्थरों के टुकड़ो का ढ़ेर बन जाता था। रात के समय जब उसकी भेड़ें वापिस लौटती थीं, तो वह प्रत्येक भेड़ के लिए ढ़ेर में से एक पत्थर बाहर निकालता था। इस प्रकार वह पता लगा लेता था कि सभी भेड़ें वापस आई हैं अथवा नहीं।

लम्बे समय के पश्चात्, एक वस्तु को दूसरी वस्तु के साथ सुमेलित करने की बजाय, मनुष्य ने संख्याओं को हाथ और उंगलियों की स्थिति से दर्शाना शुरू किया। परन्तु संख्याओं का इस प्रकार का प्रदर्शन, गणना कार्य के लिए उपयुक्त नहीं था। कुछ समय पश्चात् लेखन के शोधन के साथ, इन संख्याओं के लिए कुछ संकेतों का वर्गीकरण किया गया। उदाहरणार्थ, ग्रीक लोगों ने α, β इत्यादि का प्रयोग किया, रोम के लोगों ने संख्या 1, 4, 10 को दर्शाने के लिए क्रमश: I, IV, X का प्रयोग किया, इनको तो हम आज भी प्रयोग करते है। अन्तत:, हिन्दु - अरबिक संख्या सकेंतो 1, 2, 3, 4 का अविष्कार किया गया जिन्हें हम आजकल प्रयोग करते हैं। हिन्दु – अरबिक संख्या पद्धति का नामकरण हिन्दुओं जिन्होंने इनका आविष्कार किया और अरबों जिन्होंने इन्हें पश्चिमी यूरोप में पहुँचाया, के नाम पर किया गया है। वर्तमान संख्या संकेतों के सबसे पुराने संरक्षित उदाहरण राजा अशोक द्वारा, 250 BC में, भारत में, बनवाये गये पत्थर के कुछ स्तम्भों मे पाये जाते हैं।

प्रारम्भिक समय में, मनुष्य केवल अपनी वस्तुओं को गिनने के लिए संख्याओं का प्रयोग करता था परन्तु कुछ समय पश्चात् 'कुछ नहीं अथवा कोई नहीं' को दर्शाने के लिए संकेत की आवश्यकता हुई। हिन्दु शोधकर्ताओं ने 'रिक्त समूह' अथवा 'कोई नहीं' को दर्शाने के लिए संकेत 0 (शून्य) का अविष्कार किया। प्राकृत संख्याएं, संख्या '0' के साथ मिलकर पूर्ण संख्याएं कहलाती हैं।

किसी प्राकृत संख्या द्वारा निरूपित स्थिति के विपरीत स्थिति को दर्शाने के लिए किस प्रकार की संख्या ली जाए। उदाहरणार्थ यदि कोई प्राकृत संख्या शून्य से 5 डिग्री अधिक को निरूपित करती है, तो शून्य से पाँच डिग्री कम को कैसे दर्शाया जाए। हमारे पूर्वज इस प्रकार की समस्याओं का लगातार सामना करते रहे। हमारी संख्या, पद्धति का एक और महत्वपूर्ण विस्तार लगभग सौ वर्ष बाद आया। शून्य को मूल बिन्दु लेकर, मूल बिन्दु के दायीं ओर स्थित किसी संख्या के, संगत मूलबिन्दु के बायीं ओर स्थित संख्या के

विषय में सोचना सम्भव हुआ। उदाहरणार्थ, –5 को 5 के संगत और –3 को 3 के संगत लिया गया और इसी प्रकार अन्य के लिए भी। –4, –3, –2, –1, जैसी ऋणात्मक संख्याएँ पूर्ण संख्याओं के साथ मिलकर पूर्णांक कहलाती है।



विशेषत:, वस्तुओं को मापते समय किसी पूर्ण वस्तु के एक भाग को दर्शाने में मनुष्य ने स्वंय को अयोग्य पाया उदाहरणार्थ यदि कोई घड़ा पूरी तरह भरा हुआ नहीं था तो घड़े मे कितना पानी था। इस आवश्यकता ने भिन्न नामक नई संख्याओं के अविष्कार की ओर अग्रसर किया। भिन्न , $\frac{p}{q}$ के रूप की होती है जहाँ p और q पूर्ण प्राकृत संख्याएं है। पूर्णाकों की तरह, भिन्न के विपरीत स्थितियों को दर्शाने के लिए नई संख्याएं जैसे $-\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}, -\frac{5}{7}$ इत्यादि को संख्या पद्धति मे सम्मिलित किया गया। ये नई संख्याएं पूर्णाकों एवं भिन्न सहित, परिमेय संख्याएँ कहलाती हैं। अत: परिमेय संख्या $\frac{p}{q}$ के रूप की संख्या होती है जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं और $q \neq 0$.

छठी शताब्दी BCE, कुछ ऐसी संख्याओं की आवश्यकता पड़ी जो परिमेय संख्याएं नहीं थी अर्थात् इन संख्याओं को दो पूर्णांको के भागफल के रूप में व्यक्त नहीं किया जा सकता था। पायथागोरस ने अविष्कार किया कि एक फुट लम्बीं भुजा के वर्ग का विकर्ण $\sqrt{2}$ फुट लम्बा होता है। इस संख्या को दो पूर्णांकों के भागफल के रूप में व्यक्त करना असम्भव है। इस प्रकार की संख्याएं अपरिमेय संख्याएं कहलाती हैं।

परिमेय और अपरिमेय संख्याएं मिलकर एक समूह बनाती हैं जिसे वास्तविक संख्याओं का समूह कहा जाता है।

गणित में शुरू से अंत तक वास्तविक संख्याएं प्रयोग की जाती हैं और हमें इन संख्याओं के साथ भली भांति परिचित होना चाहिए, जैसे कि-

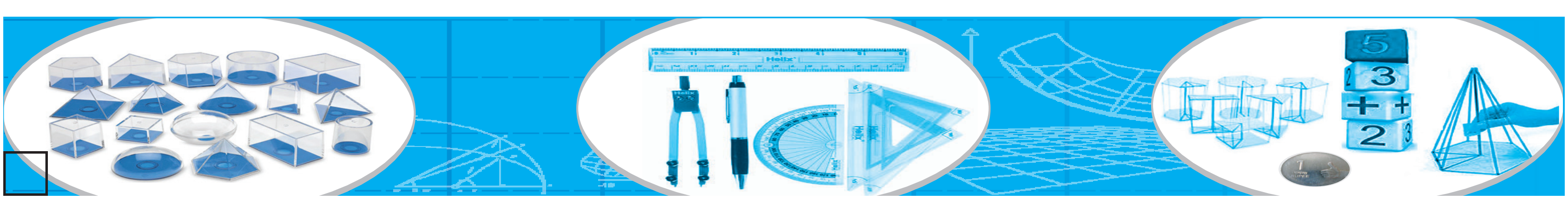
$$2, 54, -3, \frac{26}{7}, 3, 0, \sqrt[3]{74}, 0.444..., 291.38, 1.212112111...$$

1.2. सामान्य कौशल

1. पूर्व में अध्ययन किए संख्या पद्धति को स्मरण करना
2. शिक्षण के लिए आगमनिक – निगमनिक विधि का प्रयोग करना
3. विभिन्न अवधारणाओं की उदाहरणों एवं क्रियाकलापों से व्याख्या करना
4. विद्यार्थियों को व्यावहारिक स्तर की समस्याओं को हल करने योग्य बनाना।

1.3. मूल संकल्पनाएं

- परिमेय संख्याएँ
- अपरिमेय संख्याएँ
- संख्या रेखा पर अपरिमेय संख्याओं का स्थान निर्धारित करना
- वास्तविक संख्याएं और उनका दशमलव प्रसारण
- वास्तविक संख्याओं पर संक्रियाएं
- वास्तविक संख्याओं के लिए घातांक के नियम
- करणियाँ
- हर का परिमेयकरण
- संख्याओं की अपरिमेयता सिद्ध करना



- ऐसे प्रतिबंधों की छान – बीन करना कि कब एक परिमेय संख्या का दशमलव प्रसारण, सांत होता है और कब असांत आवर्ती होता है।
- यूक्लिड की भाग प्रमेयिका (लेमा)
- दो घनात्मक पूर्णांको का म. स. ज्ञात करने के लिए यूक्लिड की भाग कलन – विधि
- अंकगणित की आधारभूत प्रमेय और इसके अनुप्रयोग

1.4. शिक्षण कौशल

अब हम, कक्षा में शिक्षण – अधिगम के लिए नीचे दी गई हुई कुछ मूल संकल्पनाओं के विषय में चर्चा करेंगे:

I. करणियाँ

II. हर का परिमेयकरण

III. यूक्लिड की भाग प्रमेयिका

करणियां

शिक्षक (T): आप पहले से ही परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं से परिचित हैं, क्या आप परिमेय संख्याओं तथा अपरिमेय संख्याओं के कुछ उदाहरण दे सकते हैं ?

विद्यार्थी (S_1): $3, -5, 0, \frac{2}{3}$ और $\frac{-2}{3}$ परिमेय संख्याएं हैं।

विद्यार्थी (S_2): $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt[3]{6},-\sqrt{7},\quad \sqrt{2}+\sqrt{3},\ 2+\sqrt{5}$ और $\sqrt{\frac{2}{3}}$ अपरिमेय संख्याएं हैं।

T: इन सभी अपरिमेय संख्याओं में संकेत ‘ $\sqrt{\ }$ ’ का प्रयोग किया गया है। क्या आप इस संकेत का नाम जानते हैं ?

S_2: हाँ मैडम, इसे ‘करणी चिह्न’ कहा जाता है।

T: बहुत अच्छा! आप देख सकते हैं कि इन संख्याओं में से कुछ संख्याओं; $\sqrt{2},\sqrt{3},\sqrt[3]{6},-\sqrt{7}$ और $\sqrt{\frac{2}{3}}$, में करणी चिन्ह ‘ $\sqrt{\ }$ ’ के अन्तर्गत परिमेय संख्याएं हैं।

S_3: मैडम, ऐसी संख्याओं का क्या ? कोई विशेष नाम है?

T: ऐसी संख्या को करणी कहते है। अतः $\sqrt{\ }$ एक करणी कहलाएगी, यदि

I. $\sqrt[n]{a}$ एक अपरिमेय संख्या है और

II. a एक परिमेय संख्या है।

क्या. आप करणियों के कुछ और उदाहरण बता सकते हैं ?

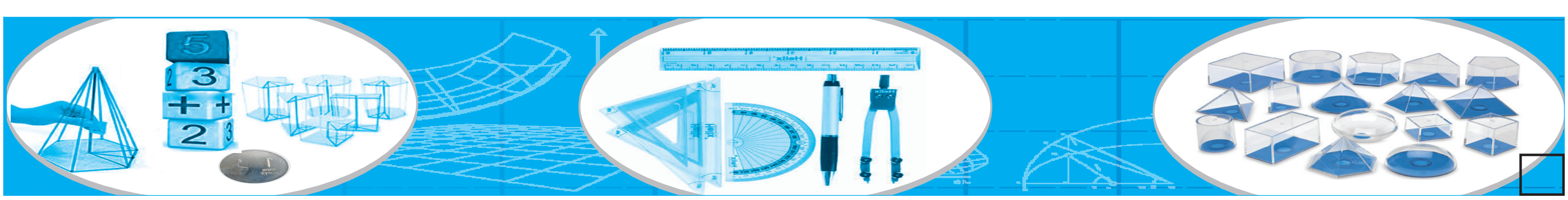
S: $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$

T: कुछ और उदाहरण बताइए

S: $\sqrt[5]{4}$, $\sqrt[3]{5}$, $\sqrt[6]{2}$

T: बहुत अच्छा!

अब कुछ ऐसी संख्याओं के उदाहरण दीजिए जिनमें करणी चिन्ह तो है परन्तु, वे करणियां नहीं हैं।



विद्यार्थियों से कोई प्रतिक्रिया प्राप्त नही होती है।

T: करणी की परिभाषा पर ध्यान दीजिए। उपरोक्त दो, प्रतिबंधों में से यदि कोई एक, प्रतिबंध संतुष्ट नहीं होता है, तो वह संख्या करणी नहीं कहलाएगी। प्रथम प्रतिबंध के अनुसार $\sqrt[n]{a}$ एक अपरिमेय संख्या है। इसलिए $\sqrt[n]{a}$ प्रकार की एक ऐसी संख्या सोचिए जो अपरिमेय नहीं है अर्थात जो परिमेय है।

S_1: $\sqrt{4}$

S_2: $\sqrt{9}$

T: अच्छा, क्या $\sqrt[3]{8}$ एक करणी है ?

S_1: हाँ

S_2: नही मैडम, क्योंकि $\sqrt[3]{8} = 2$, इसलिए यह करणी नहीं है।

T: इसी प्रकार $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[5]{32}$ भी ऐसी संख्याओं के उदाहरण हैं जो करणियाँ नहीं हैं।

T: दूसरे प्रतिबंध के अनुसार, $\sqrt[n]{a}$ में, a एक परिमेय संख्या है। इसलिए $\sqrt{\pi}$, $\sqrt{2-\sqrt{2}}$ इत्यादि जैसी संख्याएं करणियां नहीं है

T: $\sqrt{\sqrt{4}}$, $\sqrt{\sqrt{16}}$ के विषय में आपके क्या विचार है? क्या ये करणियाँ हैं ?

S: नहीं

T: क्यों

कोई प्रतिक्रिया नहीं

T: $\sqrt{\sqrt{4}}$ को $\sqrt{2}$ लिखा जा सकता है और अब करणियों के दोनों प्रतिबंध संतुष्ट हैं अर्थात $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्याए है और 2 एक परिमेय संख्यां है। इसलिए $\sqrt{\sqrt{4}}$ एक करणी है। $\sqrt{\sqrt{16}} = \sqrt{4} = 2$, यह एक परिमेय संख्या है और इसलिए $\sqrt{\sqrt{16}}$ एक करणी नहीं है।

T: क्या $\sqrt{125}$ एक करणी है ?

S: हाँ, $\sqrt{125} = \sqrt{5\times5\times5} = \sqrt{5\times5} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$, यह एक करणी है क्योंकि 5 $\sqrt{5}$ एक अपरिमेय संख्या है।

T: इसलिए, $\sqrt{125} = 5\sqrt{5}$, $\sqrt{125}$ को 5 $\sqrt{5}$ लिखना करणी का सरलीकरण कहलाता हैं

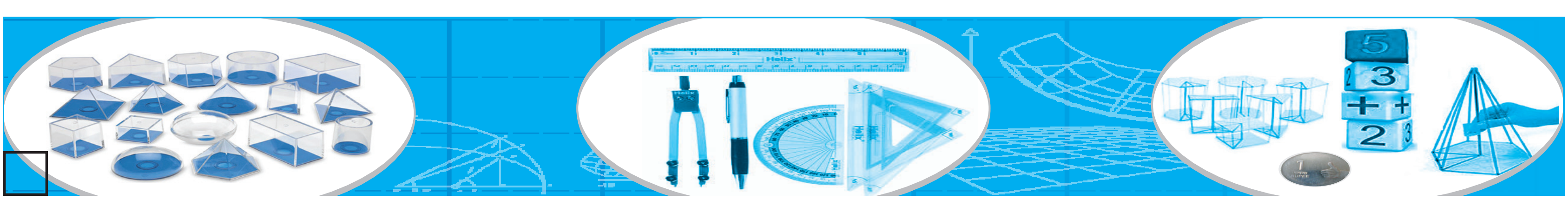
अब $\sqrt{18}$ को सरल कीजिए।

S: $\sqrt{18} = \sqrt{3\times3\times2} = \sqrt{3\times3} \times \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$

T: अच्छा

$7\sqrt{2} - 4\sqrt{2}$ को सरल करने पर क्या प्राप्त होगा ?

S: 3 $\sqrt{2}$ प्राप्त होगा।



T: क्या आप $16\sqrt{5}-3\sqrt{125}$ को सरल कर सकते हैं ?

S: हम इसे सरल नहीं कर सकते।

T: क्यों

S: क्योंकि दोनो पद विभिन्न हैं।

T: क्या आप $\sqrt{125}$ को सरल कर सकते हैं ?

S: हाँ, हमने इसे अभी थोड़ी देर पहले किया है। इसका मान $5\sqrt{5}$ है।

अरे हाँ। हम $16\sqrt{5}-3\sqrt{125}$ को निम्नलिखित प्रकार सरल कर सकते हैं:

$16\sqrt{5}-3\times5\sqrt{5} = 16\sqrt{5}-15\sqrt{5} = \sqrt{5}$

T: बहुत अच्छा !

$\sqrt{10} \times \sqrt{5}$ का मान क्या होगा ?

S: यह $\sqrt{2\times5} \times \sqrt{5}$ है।

S यहाँ पर रूक जाता है।

T: हाँ। हाँ। आगे बढ़िए

S: $=\sqrt{2\times5\times5}=\sqrt{2}\times\sqrt{5\times5}=\sqrt{2}\times5=5\sqrt{2}$

T: बहुत अच्छा !

T: $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2}$ का मान क्या है?

S: यह $2\times3\sqrt{2}=6\sqrt{2}$, है।

T: क्या आपको पूर्ण विश्वास है ? $2x \times 3x$ किसके समान है ?

S: $6x^2$

T: तो, $2\sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 2\times3\sqrt{2}$, कैसे ?

S: अरे हाँ। यह तो $2\times3\times\left(\sqrt{2}\right)^2=6\times2=12$ होना चाहिए

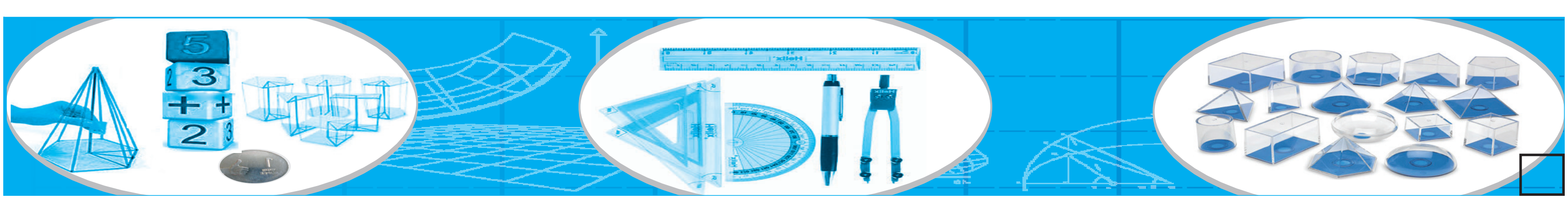
T: बिल्कुल ठीक

अब बताइए कि $\sqrt{7}\left(\sqrt{14}+\sqrt{7}\right)$ का मान क्या है?

S: यह $\sqrt{7}\ \ \sqrt{14}+7$ होगा

छात्र, यहाँ कुछ समय के लिए रूक जाता है और तब कहता है, मैडम हम इसे और सरल कर सकते हैं।

T: हाँ, कीजिए



S: $\sqrt{7}\,\sqrt{2\times 7}+7=\sqrt{7}\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}+7 \;=\; 7\sqrt{2}+7$

T: हाँ, ठीक है।

$\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)$ का मान क्या है?

S: यह $1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\sqrt{3}\,\sqrt{3}=1-3=-2$ होगा

T: क्या आप इसे सरल करने के लिए कोई सूत्र (बीजीय सर्वसमिका) का प्रयोग कर सकते हैं ?

S: अरे हाँ। कर सकते है।

T: वह सूत्र क्या है?

S: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

इसलिए यह $1^2-\left(\sqrt{3}\right)^2=1-3=-2$ होगा।

T: अच्छा

अब $\left(2\sqrt{10}+3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{10}-3\sqrt{5}\right)$ को सरल कीजिए

S: यह $2\sqrt{10^2}-3\sqrt{5^2} \;=2\times 10-3\times 5=5.$ होगा

T: क्या यह सही है ?

S_2: मैडम। यह $\left(2\sqrt{10}\right)^2-\left(3\sqrt{5}\right)^2 = 4\times 10-9\times 5=40-45=-5$ होना चाहिए।

T: हाँ यह सही विधि है।

$\left(1+\sqrt{2}\right)\;\left(\sqrt{3}-1\right)-2\sqrt{5}$ को सरल कीजिए

S: $\sqrt{3}-1+\sqrt{2}\sqrt{3}-\sqrt{2}-2\sqrt{5}$

S: इसे $\sqrt{3}-1+\sqrt{6}-\sqrt{2}-2\sqrt{5}$ के रूप में आगे और सरल किया जा सकता है

T: क्या हम इसे आगे और सरल नहीं कर सकते ?

S: नहीं

T: क्यों?

S: क्योंकि सभी पद विभिन्न हैं

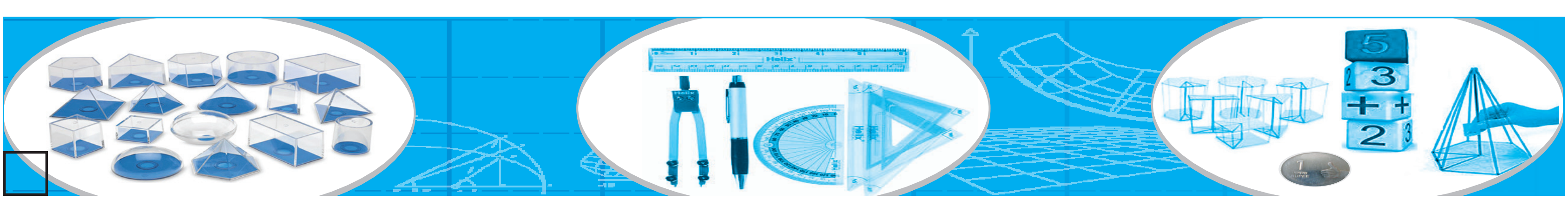
T: हाँ, सभी पद विजातीय हैं। विजातीय करणियों के पद विजातीय पद कहलाते हैं।

$2\sqrt{3}$, $4\sqrt{5}$, $-\sqrt{2}$ विजातीय पद हैं। $\sqrt{3}$, $-2\sqrt{3}$, $\frac{3}{4}\sqrt{3}$ सजातीय पद हैं। $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}}$ का मान क्या है ?

S: यह $\frac{5}{7}$ है

T: कैसे इसे कैसे प्राप्त किया ?

S: अंश और हर दोनों में से वर्गमूल को निरस्त करने पर



T: आप वर्गमूल के चिन्ह को इस प्रकार निरस्त नहीं कर सकते।

वास्तव में $\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{7}} = \dfrac{5^{1/2}}{7^{1/2}}$

घातांको के नियमों को स्मरण कीजिए। आप विभिन्न संख्याओं की घातों को निरस्त नहीं कर सकते।

हम इसे $\sqrt{\dfrac{5}{7}}$ लिख सकते हैं।

इसी प्रकार, $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} \neq \dfrac{8}{2} = 4$.

यह $\sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$ है।

पुनरावलोकन प्रश्न

निम्नलिखित को सरल कीजिए:

(i) $\sqrt{150}$

(ii) $\sqrt{112}$

(iii) $\sqrt{10} \times \sqrt{5}$

(iv) $\left(5\sqrt{5}\right)^2$

(v) $9\sqrt{5} - 2\sqrt{5}$

(vi) $26\sqrt{2} + 10\sqrt{8}$

(vii) $\dfrac{7\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$

(viii) $\left(2+\sqrt{7}\right)\left(\sqrt{7}-2\right)$

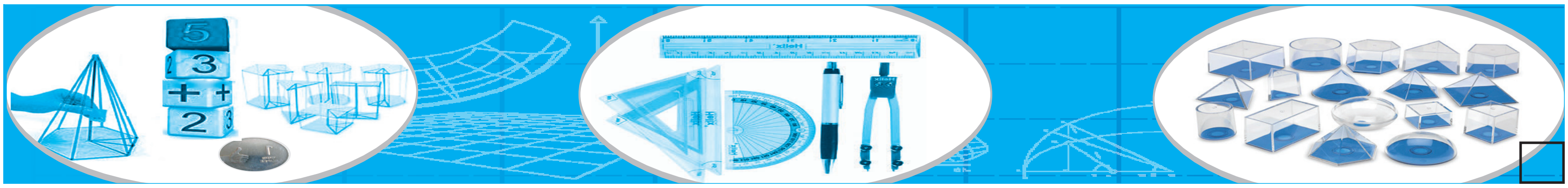
(ix) $\left(2\sqrt{10}+3\sqrt{5}\right)\left(2\sqrt{10}-3\sqrt{5}\right)$

(ii) हर का परिमेयकरण:

T: क्या आप $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ का मान ज्ञात कर सकते हैं, यदि $\sqrt{3} = 1.732$ दिया हुआ है

S$_1$: $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{1}{1.732} = \dfrac{1000}{1732}$

$$
\begin{array}{r|l}
 & \ \ 0.577 \\
1732 & 1000.000 \\
 & \ \ 866\ 0 \\ \hline
 & \ \ 134\ 00 \\
 & \ \ 121\ 24 \\ \hline
 & \ \ \ \ 12\ 760 \\
 & \ \ \ \ 12\ 124 \\ \hline
 & \ \ \ \ \ \ \ \ 636
\end{array}
$$



अत: $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = 0.577$

S_2: मैं इसे इस प्रकार भी कर सकता हूँ: यदि हम $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ को निम्न, प्रकार लिखें, तो

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1.732}{3} = 0.577$$

T: दोनों विधियां सही हैं परन्तु दूसरी विधि में अंश और हर दोनो को $\sqrt{3}$ से गुणा करने पर, हर एक परिमेय संख्या बन जाती है। $\sqrt{3}$ का मान रखकर, आप इसका मान आसानी से ज्ञात कर सकते हैं।

यहाँ पर आप मौखिक रूप से भाग कर सकते है जबकि प्रथम विधि में भाग बहुत मुश्किल है।

हर से करणियों को लुप्त करने की विधि, हर का परिमेयकरण कहलाता है।

T: क्या अब, आप $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ के हर का परिमयेकरण कर सकते है?

S: $\dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \times \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \dfrac{10\sqrt{10}}{5}$

T: क्या आप इसे और अधिक सरल कर सकते हैं?

S: हाँ मैडम। मैं इसे $\dfrac{10\sqrt{10}}{5} = 2\sqrt{10}$ लिख सकता हूँ।

T: बहुत अच्छा !

अब, $\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए

T: क्या आप इसे और अधिक सरल कर सकते हैं?

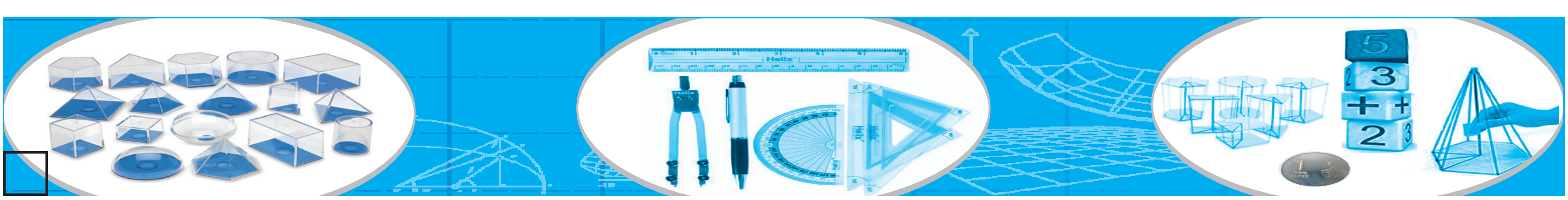
S: हाँ मैडम। मैं इसे $\dfrac{10\sqrt{10}}{5} = 2\sqrt{10}$ लिख सकता हूँ।

T: बहुत अच्छा !

S: $\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}} \times \dfrac{3\sqrt{7}}{3\sqrt{7}} = \dfrac{3\sqrt{35}}{9 \times 7} = \dfrac{\sqrt{35}}{21}$

T: ध्यान दीजिए, हर में 3 पहले से ही परिमेय संख्या है इसलिए $3\sqrt{7}$ से गुणा एंव भाग करने की आवश्यकता नहीं है। केवल $\sqrt{7}$ से गुणा एंव भाग करना पर्याप्त होगा।

S: हाँ, $\dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3\sqrt{7}} \times \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{5 \times 7}}{3 \times 7} = \dfrac{\sqrt{35}}{21}$



T: बहुत अच्छा! $\frac{1}{3-\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण करने का प्रयास कीजिए

S$_1$: $\frac{1}{3-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3\sqrt{5}-5}$

S$_2$: हर में अभी भी $\sqrt{5}$ है। इसीलिए हर का परिमेयकरण नही हुआ।

S$_3$: मेरे विचार में इसे निम्न प्रकार किया जा सकता है:

$$\frac{1}{3-\sqrt{5}} \times \frac{(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{3^2-(\sqrt{5})^2}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{9-5}$$

$$= \frac{3+\sqrt{5}}{4}$$

T: आपने इसे इस प्रकार करने के बारे में कैसे सोचा?

S$_{3}$: मैडम, मैंने अपने मस्तिष्क में $(a-b)(a+b) = (a^2-b^2)$ सर्वसमिका के बारें में विचार किया था।

T: अब $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}}$ के हर का परिमेयकरण करने का प्रयास कीजिए।

आप किस संख्या से गुणा एवं भाग करोगे ?

S: यदि $\sqrt{2}$ से गुणा करते हैं तो करणी फिर भी रहेगी और यदि हम $\sqrt{5}$ से गुणा करते है, तो भी हर में करणी रहेगी। S, शिक्षक की ओर देखता है।

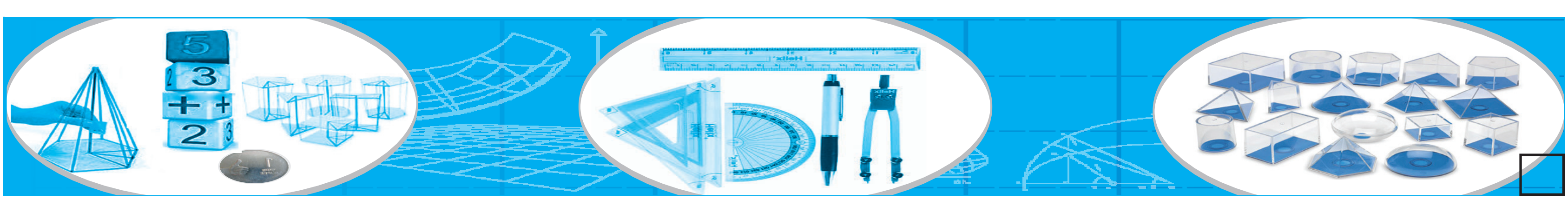
T: इस प्रश्न में, यदि आप $\sqrt{2}-\sqrt{5}$ को $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ से गुणा करते हैं, तो आप $\left(\sqrt{2}-\sqrt{5}\right)$ $\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{5}\right)^2 = 2-5 = -3$ प्राप्त करते है: और यह एक परिमेय संख्या है

इसलिए $\frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{2}-\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{\sqrt{2}+\sqrt{5}}$

अगला चरण क्या है ?

S: $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{(\sqrt{2})^2-(\sqrt{5})^2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{-3}$

T: अच्छा, परन्तु आप उत्तर को $\frac{-\left(\sqrt{2}+\sqrt{5}\right)}{3}$ लिख सकते हैं, जिससे कि हर धनात्मक बन जाए।
अब हम कुछ और उदाहरण लेते हैं।



$\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

S: $\frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{1}{2\sqrt{2}+\sqrt{6}} \times \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}$

$$= \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{\left(2\sqrt{2}\right)^2-\left(\sqrt{6}\right)^2} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{8-6} = \frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$$

$$= \sqrt{2}-\sqrt{6}$$

मैडम, मैंने इसे सरलतम रूप में लिखा है।

T: यह अच्छा है कि आपने सरलीकरण के विषय में सोचा, परन्तु आपने एक गलती की है। दोबारा जाँचिए।

S: $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$ को और अधिक सरल नहीं किया जा सकता है। हम यहाँ पर 2 को निरस्त नहीं कर सकते।

T: बहुत अच्छा ! हम 2 को तभी निरस्त कर सकते हैं यदि अंश, $2\left(\sqrt{2}-\sqrt{6}\right)$ के रूप मे होता परन्तु यहाँ पर ऐसा नहीं है।

S: महोदया। हमने इस पाठ में बहुत आनन्द प्राप्त किया है। हमने बहुत गलतियाँ की हैं। हम सभी प्रश्नों के सही उत्तर जानते थे: परन्तु पता नहीं उत्तर लिखते समय हमने ऐसी गलतियाँ कैसे कर दीं। हमें कुछ और प्रश्न हल करने के लिए दीजिए

T: हाँ, मैं आपको अभ्यास के लिए और अधिक प्रश्न दूंगी।

पुनरावृत्ति प्रश्न

निम्नलिखित के हर का परिमेयकरण कीजिए:

(i) $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{15}}$ (iii) $\frac{5+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

(ii) $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ (iv) $\frac{16}{\sqrt{41}-5}$

(v) $\frac{3+\sqrt{5}}{2-\sqrt{5}}$ (vi) $\frac{5+\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}$

(vii) $\frac{13}{3\sqrt{6}-2}$

(iii) युक्लिड की भाग प्रमेयिका (लेमा)

T: विद्यार्थियों, 17 को 5 से भाग दीजिए

S:
$$\begin{array}{r} 3 \\ 5\overline{)17} \\ \underline{15} \\ 2 \end{array}$$

T: भागफल क्या है ?

S: 3

T: शेषफल क्या है ?

S: 2

T: 17 और 5 को क्या कहते हैं ?

S: 17 को भाज्य और 5 को भाजक कहते है।

T: क्या आपको 5, 17, 3 और 2 में कोई संबंध दिखाई देता है ?

विद्यार्थियों की ओर से कोई प्रतिक्रिया नहीं प्राप्त होती है।

T: हम 17 को निम्न प्रकार लिख सकते है:

$17 = 5 \times 3 + 2$

अर्थात भाज्य = भाजक × भागफल + शेषफल

T: 21 को 5 से भाग दीजिए और इसमें सम्मिलित प्रक्रिया को उपरोक्त रूप में लिखिए

S:
$$\begin{array}{r} 4 \\ 5\overline{)21} \\ \underline{20} \\ 1 \end{array}$$

इसलिए, $21 = 5 \times 4 + 1$

T: अब 20 को 5 से भाग दीजिए

S:
$$\begin{array}{r} 4 \\ 5\overline{)20} \\ \underline{20} \\ 0 \end{array}$$

इसलिए, $20 = 5 \times 4 + 0$

बहुत अच्छा !

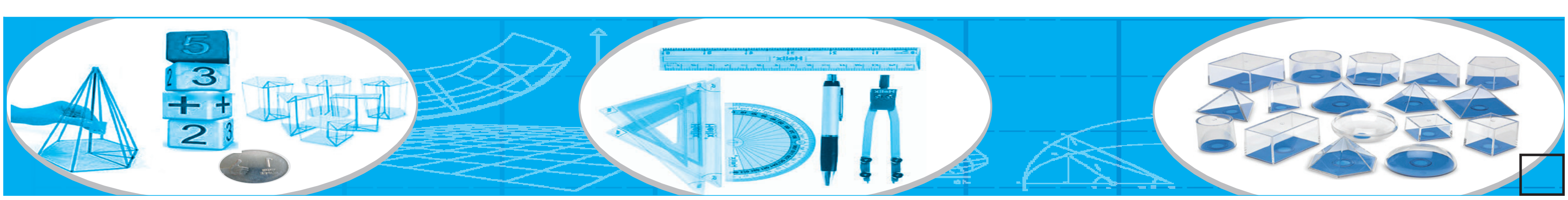
यदि a और b दो घनात्मक पूर्णांक हैं और हम a को b से भाग करें, तो उपरोक्त रूप में लिखिए

जबकि q भागफल और r शेषफल है।

S: $a = bq + r$

T: बहुत अच्छा!

T: यदि हम 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17 को 5 से भाग करें तो हमें क्यो-क्या शेषफल प्राप्त होंगे ?



S: शेषफल क्रमश: 0, 1, 2, 3, 4, 0, 1, 2 हैं।

T: क्या इन भागों के लिए हमारे पास कोई और शेषफल हो सकते है ?

S: नहीं

T: इसलिए हम कह सकते है कि किसी विशिष्ट भाग का शेषफल अद्धितीय होता है।

हमने देखा कि 4 के पश्चात् शेषफलों की पुनरावृत्ति शुरू हो गई है निष्कर्षत: जब हम किसी धनात्मक पूर्णांक को 5 से भाग करते हैं, तो सम्भावित शेषफल 0, 1, 2, 3 अथवा 4 हैं।

T: क्या यहाँ पर शेषफल 5 अथवा 6 हो सकता है ?

S: नहीं

T: इस प्रकार यहां पर शेषफल का अधिकतम मान क्या हो सकता है ?

S: 4

T: यहां पर शेषफल का न्यूनतम मान क्या हैं ?

S: 0

जब हम 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19 एवं 20 को 6 से भाग करते हैं, तो शेषफल क्या है

S: शेषफल क्रमश: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 0, 1, 2 हैं।

T: ध्यान दीजिए, यहाँ पर भी जब हमने 6 से भाग दिया तो सम्भावित शेषफल 0, 1, 2, 3, 4 अथवा 5 हैं और इनके अतिरिक्त कोई और शेषफल नहीं हो सकता।

T: शेषफल के अधिकतम एवं न्यूनतम मान क्या हैं ?

S: शेषफल का अधिकतम मान 5 और न्यूनतम मान 0 है।

T: अत:, उपरोक्त दो उदाहरणों से हम इस निष्कर्ष पर पहुँचते हैं कि $0 \leq$ शेषफल $<$ वह संख्या जिससे हम भाग दे रहे हैं।

अर्थात $0 \leq$ शेषफल $<$ भाजक

सामान्यत:, जब हम a को b से भाग देते हैं और यदि q भागफल तथा r शेषफल हैं, तो पूर्व की भांति $a = bq + r$

r पर क्या प्रतिबंध है ?

S: $0 \leq r <$ भाजक (b)

T: इस प्रकार हम $0 \leq r < b$, प्राप्त करते हैं।

T: उपरोक्त भागों में हमने जो शेषफल प्राप्त किए हैं, क्या उनके अतिरिक्त भी शेषफल प्राप्त हो सकते हैं ?

S: नहीं

T: निष्कर्ष: किसी विशिष्ट भाग में शेषफल अद्वितीय होता है

T: आप सभी128 को 5 से भाग दीजिए और भागफल बताइए

S_1: यह 25 है।

S_2: 25

S_3: 25

जिन्होंने भागफल 25 प्राप्त किया है, वे अपने हाथ उठायें। सभी विद्यार्थी अपने हाथ उठाते हैं।

T: इस प्रकार आप सभी द्वारा प्राप्त उत्तर 25 है। इसलिए हम कह सकते हैं कि हम कोई अन्य भागफल प्राप्त नही कर सकते।

T: 2180 को 9 से भाग देने पर भागफल क्या है ?

S: यह 242 है।

T: क्या आप में से किसी को भी 242 के अतिरिक्त अन्य भागफल प्राप्त हुआ है ?

S: नहीं

T: निष्कर्षत: भागफल भी अद्वितीय होता है।

इस प्रकार, यदि a और b दो धनात्मक पूर्णांक है, तो निम्नलिखित को संतुष्ट करने वाले अद्वितीय पूर्णांक q और r हमेशा होते है:

$$a = bq + r, 0 \le r < b$$

इस परिणाम को यूक्लिपड की भाग प्रमेयिका कहते हैं।

T: यदि हम 5 को 12 से भाग करें तो शेषफल क्या होगा ?

S: हम 5 को 12 से भाग नहीं दे सकते।

ऐसी स्थितियों में जब भाज्य, भाजक से छोटा होता है, तो हम कह सकते हैं कि शेषफल 0 है।

इस प्रकार $a = bq + r$, $0 \le r < b$ में, q शून्य (0) भी हो सकता है।

T: इस भाग को आप $a = bq + r$ के रूप में किस प्रकार लिखेंगे ?

S_1: $12 = 5 \times 0 +$ _ .

S_2: मैडम, यह $5 = 12 \times 0$ होना चाहिए क्योंकि हम 5 को 12 से भाग दे रहे हैं ना कि 12 को 5 से ।

T: बहुत अच्छा! आप सही हैं परन्तु पूरा उत्तर दीजिए।

S_2: $5 = 12 \times 0 + 5$

T: बहुत अच्छा!

पुनरावलोकन प्रश्न:

1. युक्लिड की भाग प्रमेयिका के अनुसार दो धनात्मक पूर्णांकों a तथा b के लिए, दो अन्य पूर्णाक q तथा r हमेशा इस प्रकार होते हैं कि $a = bq + r$,जहाँ r निम्नंलिखित को संतुष्ट करता है:

   (A) $0 < r < b$ (C) $0 < r \le b$

   (B) $0 \le r \le b$ (D) $0 > r < b$,

2. जब एक धनात्मक पूर्णांक a को 3 से भाग दिया जाता है तो शेषफल 0 एवं 1 है। क्या यह कथन सत्य है अथवा असत्य? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिए।

1.5 वैकल्पिक हलों के कुछ उदाहरण:

उदाहरण 1:

$0.2\overline{35}$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में परिवर्तित करने का एक प्रश्न मैं आपसे पूछ रही हूँ। आप में से कौन इसे ब्लैक बोर्ड पर हल करने का प्रयत्न करेगा ?

S: मैं इसे ब्लैक बोर्ड पर हल करने का प्रयत्न करूंगा

मान लीजिए, $x = 0.2\overline{35} = 0.23535\ldots$

क्योंकि दो अंको की पुनरावृत्ति हो रही है, इसलिए हम दोनो पक्षों को 100 से गुणा करेंगे।

इसलिए, $100x = 23.535\ldots$

x को इसमें से घटाने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$\begin{array}{lcl} 100x & = & 23.535\ldots \\ -x & = & -0.235\ldots \\ \hline 99x & = & \end{array}$$

S_1: यहाँ रूक जाता है:

S_2: अब, आगे इसे मैं कर सकता हूँ; $99\ x = 23.3$

इस प्रकार, $x = \frac{23.3}{99}$

अर्थात $0.2\overline{35} = \frac{23.3}{99}$

T: हमें, उत्तर $\frac{p}{q}$ के रूप में लिखना है, जहाँ p तथा q पूर्णांक हैं। इसलिए हमें अंश में से दशमलव हटाना चाहिए। इस प्रकार उत्तर क्या हैं ?

S: $0.2\overline{35} = \frac{233}{990}$

T: मैं इसे हल करने की एक दूसरी विधि आपको बताती हूँ।

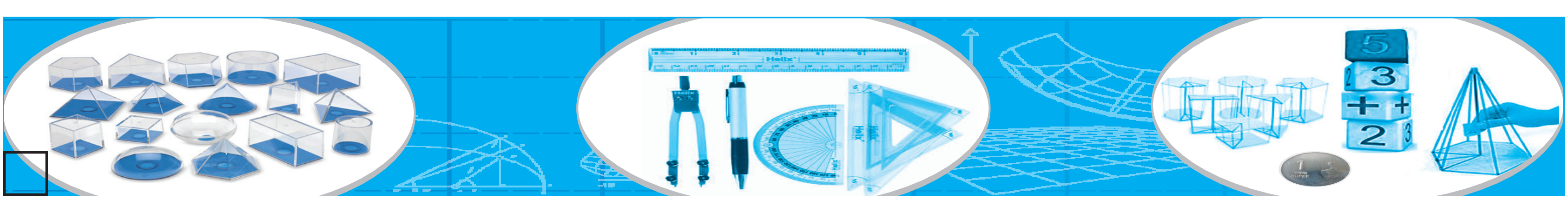
मान लीजिए, $x = 0.2\overline{35}$

क्योंकि एक अंक 2, की पुनरावृत्ति नहीं हो रही है, इसलिए आइए दोनो पक्षों को 10 से गुणा करते हैं। [यदि पुनरावृत्ति नहीं होने वाले अंक दो हैं, तो हम 100 से गुणा करते हैं और इसी प्रकार आगे भी]

$10x = 2.\overline{35} = 2.3535\ldots\ldots = y$

अब $10\,x$ अर्थात y, सामान्य रूप में परिवर्तित हो गया है।

अब इसे ब्लैक बोर्ड पर पूरा करने के लिए कौन आगे आएगा ?



S: इसे मैं करूंगा

क्योंकि दो अंकों की पुनरावृत्ति हो रही है इसलिए हम दोनो पक्षों को 100 से गुणा करेंगे।

इसलिए, $100\ y = 235.3535.....$

T: इसमें से किसे घटाना चाहिए ? x अथवा y ?

S: y

T: बहुत अच्छा! इसे पूर्ण कीजिए।

S: $100y = 235.3535...$

$$\begin{array}{rcr} -y & = & -2.3535 \\ \hline 99y & = & 233 \end{array}$$

इसलिए $y = \dfrac{233}{99}$

T: यहाँ हमें y का मान प्राप्त हुआ है परन्तु हमें x का मान ज्ञात करना है। इसलिए हमें निम्न प्रकार लिखना चाहिए

$$y = 10x = \frac{233}{99}$$

अर्थात $x = \dfrac{233}{990}$ अथवा $0.2\overline{35} = \dfrac{233}{990}$

S: हाँ मैडम, यह आसान है। मैं इसे सझ गया। उदाहरण

T: दशमलव के कितने स्थानों तक संख्या $\dfrac{91}{1250}$ का दशलव प्रसार सांत होगा?

S:
$$\begin{array}{r|l} & 0.0728 \\ 1250 & 91.0000 \\ & 87\ 50 \\ \hline & \ \ 3500 \\ & \ \ 2500 \\ \hline & \ \ 10000 \\ & \ \ 10000 \\ \hline & \ \ \ \times \end{array}$$

इस प्रकार, दी हुई संख्या का दशमलव प्रसार दशमलव के चार स्थानों के पश्चात् सांत हुआ है।

T: आपका उत्तर सही है।

हम लम्बी भाग विधि का प्रयोग किए बिना भी इसका उत्तर एक अन्य विधि से दे सकते हैं। हम पहले से ही यह ज्ञात करना

जानतें हैं कि $\dfrac{91}{1250}$ का दशमलव प्रसार सांत है अथवा नहीं। आइए सर्वप्रथम इसकी जाँच करते है। कौन इसकी व्याख्या करेगा ?

S: इसे मैं करूंगा।

91 और 1250 असहभाज्य संख्याएं हैं।

1250 के अभाज्य गुणनखंड 2 × 5 × 5 × 5 × 5 अर्थात 2×5^4 हैं।

इसलिए, $\frac{91}{1250}$ $\frac{91}{2\times5}$

क्योंकि हर के अभाज्य गुणनखंडों में केवल 2 और 5 हैं, इसलिए इसका दशमलव प्रसार सांत है।

T: बहुत अच्छा!

अब, यदि हम अंश और हर दोनो को 2^3 से गुणा कर दें, तो संख्या

$\frac{91\times2^3}{2^4\times5^4}$ अर्थात $\frac{91\times8}{(2\times5)^4}$ अर्थात $\frac{91\times8}{10^4}$ बन जाती है

क्या अब आप मुझे बता सकते हैं कि इसके प्रसार में कितनें दशमलव स्थान होंगे ? कोई प्रतिक्रिया नहीं।

चार, क्योंकि यह 10^4 अर्थात 10000 से साधारण भाग है जिसे मौखिक किया जा सकता है।

T: हमने 2^3 से गुणा क्यों किया ?

S: 2 को 2^4 बनाने के लिए

T: अच्छा। परन्तु हमें 2^4 की क्या आवश्यकता थी ?

S: जिससे कि 2 तथा 5 की घात समान हो जाएं।

T: हम 2 और 5 की घात समान क्यों करना चाहते हैं ?

S: $2^4 \times 5^4$ को $(2\times5)^4$ अर्थात 10^4 लिख सकते हैं और 10^4 से मौखिक भाग किया जा सकता है।

T: बहुत अच्छा !

अत:, व्यापकत:

यदि दी हुई संख्या $\frac{a}{2^m\times5^n}$ के रूप में है और यदि

(i) $m > n$, तो हम अंश और हर दोनो को 2^{n-m} से गुणा करते हैं जिससे कि हर में केवल 10 की घात रहें।

इसलिए, $\frac{a}{2^m\times5^n}=\frac{a\times2^{n-m}}{2^m\times5^n\times2^{n-m}}=\frac{a\times2^{n-m}}{2^n\times5^n}=\frac{a\times2^{n-m}}{(2\times5)^n}=\frac{a\times2^{n-m}}{10^n}$

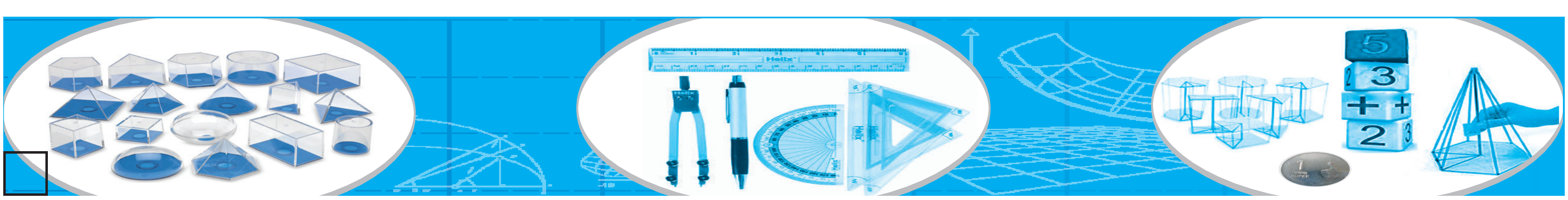
इसलिए, दशमलव प्रसार, दशमलव के n स्थानों के पश्चात् सांत होगा।

(ii) $m < n$, तो हम अंश और हर दोनो को 5 m-n से गुणा करते हैं जिससे कि हर में केवल 10 की घात रहें।

इसलिए, $\frac{a}{2^m\times5^n}=\frac{a\times5^{m-n}}{2^m\times5^n\times5^{m-n}}=\frac{a\times5^{m-n}}{2^m\times5^m}=\frac{a\times5^{m-n}}{(2\times5)^m}=\frac{a\times5^{m-n}}{10^m}$

इस प्रकार, दशमलव प्रसार, दशमलव के m स्थानों के पश्चात् सांत होगा।

निष्कर्षत: m और n में जो बड़ा है वह दशमलव प्रसार के सांत होने के स्थानों का निर्णय करता है।



1.6 संवर्धन सामग्री:

यदि किसी संख्या का दशमलव प्रसार असांत है, तो दशमलव के कितने स्थानों के पश्चात् पुनरावृत्ति शुरू हो जानी चाहिए। इसे समझने के लिए, आइए कुछ उदारण लेते है। $\frac{1}{7}$ लीजिए।

क्योंकि 1 और 7 असहभाज्य हैं और हर के अभाज्य गुणनखंडो में 2 और 5 नहीं हैं, इसलिए इस संख्या का दशमलव प्रसार असांत है।

जब हम, 1 को 7 से भाग करते है, तो यूक्लीड की भाग, प्रमेयिका के अनुसार शेषफल 0, 1, 2, 3, 4, 5 अथवा 6 हो सकता है परन्तु। 6 से अधिक नहीं हो सकता। क्योंकि इस संख्या का असांत दशमलव प्रसार है इसलिए शेषफल शून्य नहीं हो सकता और इसके दशमलव मानों की पुनरावृत्ति होनी है। इसलिए दशमलव प्रसार में छ: अथवा छ: से कम स्थानों के पश्चात् पुनरावृत्ति प्रारम्भ होगी अर्थात दशमलव प्रसार में (हर -1) स्थानों के पश्चात् अथवा (हर -1) से कम स्थानों के पश्चात् पुनरावृत्ति प्रारम्भ होगी जबकि अंश और हर असहभाज्य हैं। यह पुनरावृत्ति 1 स्थान अथवा 2 स्थान, ---- अधिकतम (हर -1) स्थान के पश्चात् कभी भी शुरू हो सकती है।

जब हम, 1 को 7 से भाग करते है, तो यूक्लीड की भाग, प्रमेयिका के अनुसार शेषफल 0, 1, 2, 3, 4, 5 अथवा 6 हो सकता है परन्तु। 6 से अधिक नहीं हो सकता। क्योंकि इस संख्या का असांत दशमलव प्रसार है इसलिए शेषफल शून्य नहीं हो सकता और इसके दशमल मानों की पुनरावृत्ति होनी है। इसलिए दशमलव प्रसार में छ: अथवा छ: से कम स्थानों के पश्चात् पुनरावृत्ति प्रारम्भ होगी अर्थात दशमलव प्रसार में (हर -1) स्थानों के पश्चात् अथवा (हर -1) से कम स्थानों के पश्चात् पुनरावृत्ति प्रारम्भ होगी जबकि अंश और हर असहभाज्य हैं। यह पुनरावृत्ति 1 स्थान अथवा 2 स्थान, ---- अधिकतम (हर -1) स्थान के पश्चात् कभी भी शुरू हो सकती है।

इसप्रकार, $\frac{2}{17}$,2 और 17 असहभाज्य हैं और 17 का अभाज्य गुणनखंड 2 या 5 नहीं है। अत:प्रकार, $\frac{2}{17}$ का दशमलव प्रसार असांत है और अधिक से अधिक 16 दशमलव के स्थानों के बाद ही इसकी पुनरावृत्ति होती है। इसकी पुनरावृत्ति पहले भी हो सकती है।

1.7 भ्रान्तियाँ/ सामान्य गलतियां

1. $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}}$ एक परिमेय संख्या नहीं है क्योंकि अंश और हर पूर्णांक नहीं है। यहाँ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$, जो कि एक परिमेय संख्या है।

2. $\sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$, $\sqrt{5}, \sqrt{8} = \sqrt{40}$

   इसलिए, $\sqrt{a} \quad \sqrt{b} = \sqrt{ab}$, सभी a तथा b के लिए।

   यह संबंध सदैव सत्य है, जब a और b धनात्मक संख्याएं हैं।

3. यदि x एक परिमेय संख्या है और y एक अपरिमेय संख्या है, तो xy एक अपरिमेय संख्या है। यह परिणाम, $x = 0$ के लिए सत्य नही है। x के अन्य सभी मानों के लिए यह सत्य है।

4. $\sqrt{-4} = -\sqrt{4} = -2$

   $\sqrt{-4}$ वास्तविक संख्या नहीं है जबकि - $\sqrt{4}$ वास्तविक है।

   जहाँ $\sqrt{-4} \neq -\sqrt{4}$

5. $\sqrt{a^2+b^2}=a+b$ अथवा $\sqrt{a+b}=\sqrt{a}+\sqrt{b}$

ये सत्य नहीं हैं क्योंकि

$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$, जबकि $\cdot + \;=$

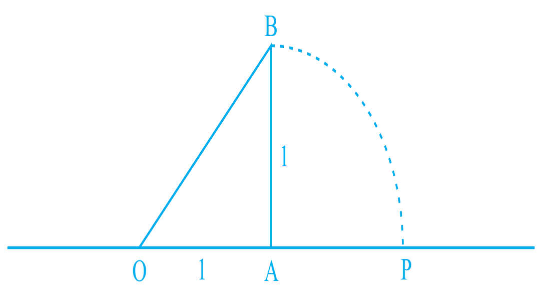
अत: $\sqrt{3^2+4^2}\neq 3+4$

6. π एक परिमेय संख्या है क्योंकि $\pi=\dfrac{22}{7}$ है। परन्तु। यह ऐसा नहीं है। $\dfrac{22}{7}$, π का सन्निकट मान है जिसे गणन के उद्देश्य से लिया जाता है। वास्तव में π एक अपरिमेय संख्या है।

7. π एक वृत्त की परिधि (c) और व्यास (d) का अनुपात है अर्थात $\pi=\dfrac{c}{d}$, इसलिए, π एक परिमेय संख्या है क्योंकि यह $\dfrac{p}{q}$ के रूप में है। परन्तु यह ऐसा नहीं है क्योंकि वृत्त की परिधि ओर व्यास का माप हमेशा पर्णांक नही होता है। इसलिए π परिमेय संख्या नहीं है।

8. $\sqrt{2}=1.4142$ का दशमलव प्रसार सांत है। इसलिए $\sqrt{2}$ एक परिमेय संख्या है। यह एक भ्रान्ति है क्योंकि 1.4142, $\sqrt{2}$ का सन्निकट मान है।

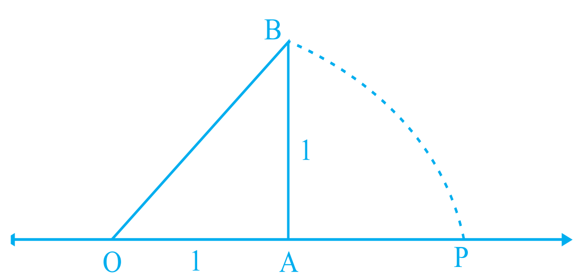
9. विद्यार्थी 1.030030003---- प्रकार की संख्याओं को आवृति अर्थात असांत आवृति प्रकार की संख्या मानकर एक परिमेय संख्या समझते हैं जबकि सत्यता यह है कि यह संख्या आवृति प्रकार की नहीं हैं क्योंकि अंको के एक ही समूह की पुनरावृत्ति नहीं हो रही है।



10. केवल 1.1, 1.2, 1.3, ----- 1.9 ही 1 और 2 के मध्यम परिमेय संख्याएं हैं। नि: सन्दहे 1 और 2 के मध्य यह कुछ परिमेय संख्याएं हैं परन्तु 1.11, 1.1141, 1.1238 इत्यादि1 और 2 के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएं है।

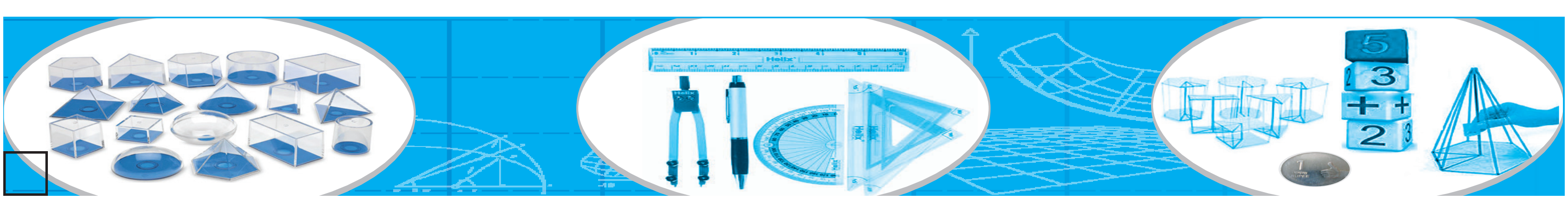
11. $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के मध्य कोई अपरिमेय संख्या नहीं है।

वास्तव में $\sqrt{2}$ और $\sqrt{3}$ के मध्य अनन्त अपरिमेय संख्याएं है।

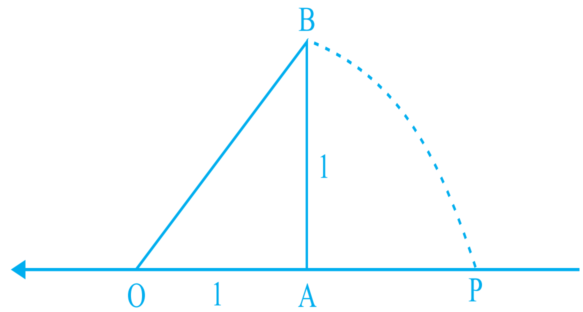


12. $\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर स्थापित करने के लिए, कुछ विद्यार्थी:

(1) A को केन्द्र और AB को त्रिज्या लेते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं कि AP = $\sqrt{2}$

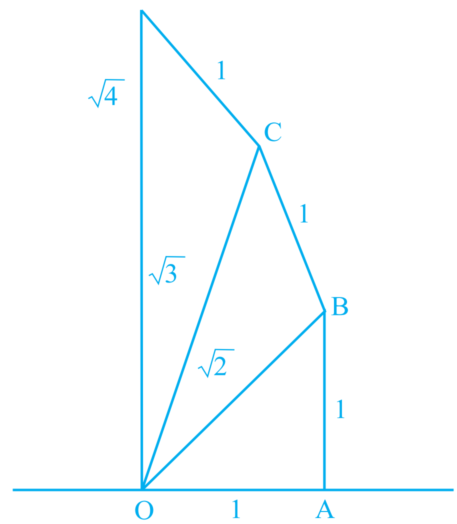


(2) A को केन्द्र और OB को त्रिज्या। लेते हैं और निष्कर्ष निकालते हैं कि OP = $\sqrt{2}$.

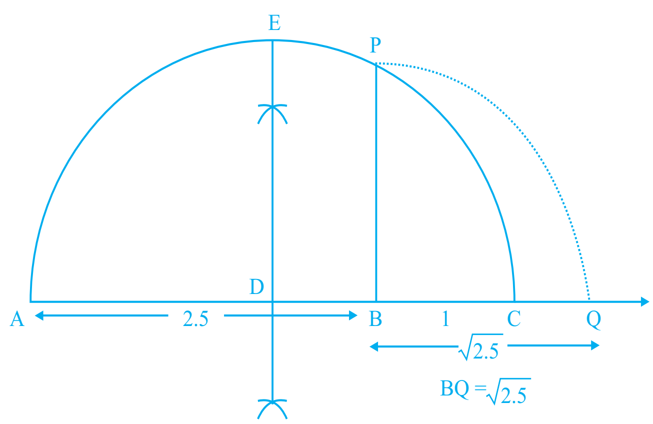


जबकि सही उत्तर निम्न प्रकार है:

O को केन्द्र और OB को त्रिज्या लीजिए और निष्कर्षत: OP = $\sqrt{2}$



13. वर्गमूल स्पाईरल (सर्पिल) बनाते समय, A, B तथा C पर समकोण नहीं बनाए जाते हैं

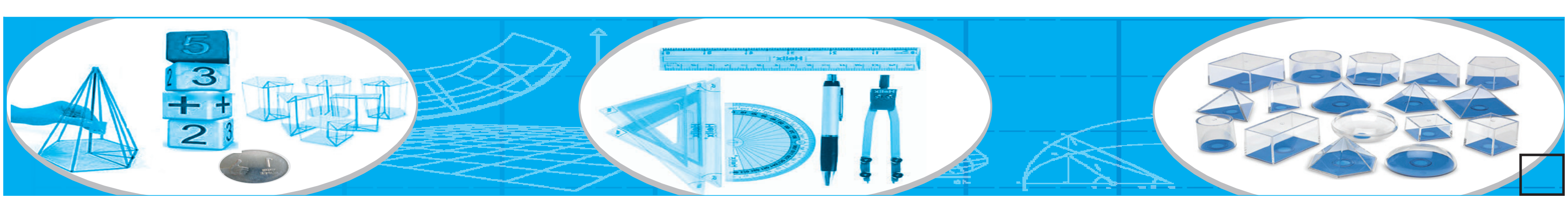


14. $\sqrt{2.5}$ को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए:

(1) AC का लंब समद्विभाजक बनाने की बजाय, विद्यार्थी AB का लंब समद्विभाजक बनाते हैं।

(2) BP = $\sqrt{2.5}$ कहने की बजाय, DE = $\sqrt{2.5}$ कहते हैं।

(3) $\sqrt{2.5}$ को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए, B की बजाय D को मूल बिन्दु लेते हैं।



15. म. स. $(p, q) \times$ ल. स. $(p, q) = p \times q$

तीन संख्याओं के लिए भी, निम्न परिणाम गलत तरीके से प्रयोग किया जाता है:

म.स.$(p, q, \mathrm{r}) \times$ ल. स. $(p, q, \mathrm{r}) = p \times q \times \mathrm{r}$

सही परिणाम इस प्रकार है:

$$\text{ल.स.}\ (p, q, \mathrm{r}) = \frac{p\ q\ \mathrm{r}\ \text{म.स.}\ (p,q,\mathrm{r})}{\text{म.स.}\ (p,q)\ \text{म.स.}\ (q, r)\ \text{म.स.}\ (p, r)}$$

$$\text{म.स.}\ (p, q, r) = \frac{p\ q\ r\ \text{ल.स.}(p, q, r)}{\text{ल.स.}(p, q)\ \text{ल.स.}\ (q, r)\ \text{ल.स.}\ (p, r)}$$

16. यह एक भ्रान्ति है कि सांत दशमल प्रसार के लिए हर के अभाज्य गुणनखंडों में 2 और 5 दोनो होने चाहिए। यदि हर के अभाज्य गुणनखंड में 2 अथवा 5 में से कोई एक भी हैं, तो सांत दशमलव प्रसार होगा।

17. यूक्लीड की भाग प्रमेयिका और यूक्लीड की भाग कलन – विधि को एक ही समझा जाता है। प्रमेयिका एक सिद्ध कथन है जबकि कलन – विधि किसी समस्या के हल की चरणबद्ध प्रक्रिया है।

18. विद्यार्थियों द्वारा पूछे गए कुछ प्रश्न निम्न प्रकार है:

दो संख्याओं का ल.स. 84 और म.स. 5 है। यदि उनमें से एक संख्या 12 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए।

विद्यार्थी इसे निम्न प्रकार हल करते है:

म.स.$\times$ ल.स. = दो संख्याओं का गुणनफल

$\therefore 5 \times 84 = 12 \times x$

इसलिए $x = \dfrac{5 \times 84}{12} = 35$

अर्थात दूसरी संख्या 35 है।

इसलिए, दो संख्याएं 12 और 35 हैं।

परन्तु वास्तव में,यदि हम 12 और 35 का म.स. तथा ल.स. ज्ञात करे, तो हमें ल.स. 84 और म.स., 5 प्राप्त नहीं होता है। यह इसलिए हैं क्योंकि दिया हुआ प्रश्न सही नहीं है जबकि प्रक्रिया सही है। म.स., ल.स. का एक गुणनखंड होना चाहिए, जबकि 5, 84 का गुणनखंड नहीं है।

19. कुछ विद्यार्थी, संख्या $\dfrac{p}{q}$ के, सांत अथवा असांत प्रसार होने का निर्णय, p तथा q को असहभाज्य बनाए बिना, केवल हर को देखकर कर लेते हैं।

$\dfrac{99}{36}$ में, $36 = 2^2 \times 3^2$

जैसे कि 36 के अभाज्य 1 गुणनखंडों की संख्याएं 2 तथा 5 के अतिरिक्त भी हैं अर्थात 32 भी गुणनखंड हैं इसलिए दशमलव प्रसार असांत है।

परन्तु सही उत्तर निम्न प्रकार है:

$\dfrac{99}{36} = \dfrac{11}{4}$ में, $4 = 2 \times 2 = 2^2$, इसलिए दी हुई संख्या का दशमलव प्रसार सांत है।

19. $\frac{1}{17}$ में 5 अथवा 6 स्थान तक दशमलव प्रसार ज्ञात करने के पश्चात् विद्यार्थी निष्कार्ष पर पहुंच सकते हैं कि दशमलव प्रसार आवृति नहीं है। परन्तु वास्तव में ऐसा नहीं है। विद्यार्थियों को यह बात समझनी चाहिए कि $\frac{1}{17}$ एक परिमेय संख्या है क्योंकि यह $\frac{p}{q}$ के रूप में है। इसलिए इसका दशमलव प्रसार सांत अथवा असांत आवृति होना चाहिए। अत: यदि यह असांत है तो अवश्य ही आवृति होना चाहिए। यहां हम 17 से भाग कर रहे हैं, इसलिए यूक्लिड की भाग प्रकेयिका के अनुसार शेषफल 0, 2, 3, ------ अथवा 16 हो सकता है। अत: निष्कर्ष निकालने के लिए उन्हें भाग प्रक्रिया को दशमलव के 16 स्थानों तक जारी रखना चाहिए।

1.9 प्रश्नावली

बहुविकल्पीय प्रश्न

सही उत्तर लिखिए:

1. $\left(2^5\right)^{-3}$ निम्नलिखित में से किसके बराबर नहीं है:

   (A) 2^{5-3} (B) $\frac{1}{2^{15}}$ (C) $\frac{1}{\left(2^5\right)^3}$ (D) $\frac{1}{\left(2^3\right)^5}$

2. $\frac{1}{\sqrt{3}-2}$ के हर का परिमेयकरण करने पर प्राप्त संख्या है:

   (A) $\sqrt{3}+2$ (B) $\sqrt{3}-2$ (C) $-2-\sqrt{3}$ (D) $2-\sqrt{3}$

3. सभी छोटी अभाज्य एवं सबसे छोटी भाज्य संख्या का ल.स. है:

   (A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

4. $\frac{47}{2^3 5^2}$ संख्या का दशमलव प्रसार कितने स्थानों के पश्चात सांत होगा ?

   (A) 5 (B) 3 (C) 2 (D) 1

5. वह सबसे बडी संख्या, जिससे 70 एवं 125 को भाग करने पर क्रमश: 5 तथा 8 शेषफल प्राप्त होता है,

   (A) 13 (B) 65 (C) 875 (D) 1750

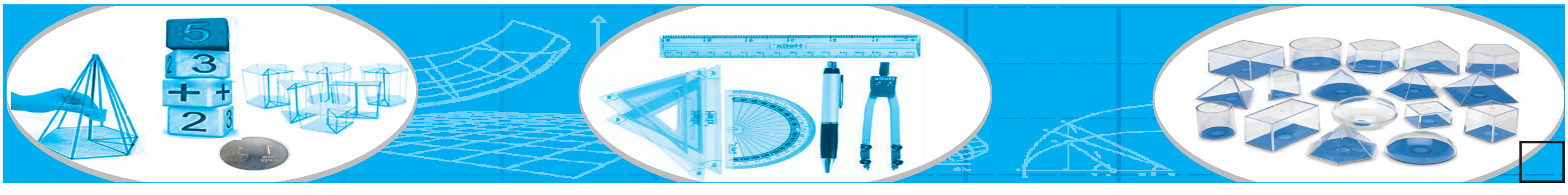
6. $\left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

   $\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$ इसलिए क्या हम कह सकते हैं कि एक अपरिमेय संख्या का वर्ग सदैव एक परिमेय संख्या होती है? उत्तर की पुष्टि कीजिए।

7. $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{3}}$ के हर का परिमेयकरण कीजिए।

8. यदि $a = 2-\sqrt{5}$, तो $a+\frac{1}{a}$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. क्या कोई ऐसी प्राकृत संख्या n है जिसके लिए 4^n के मान में इकाई का अंक शून्य है। अपने उत्तर के समर्थन में कारण बताइए।



10. $\dfrac{441}{2^2 5^7 7^2}$ का दशमलव प्रसार असांत है। अपने उत्तर की पुष्टि करते हुए सत्य अथवा असत्य की जाँच कीजिए।

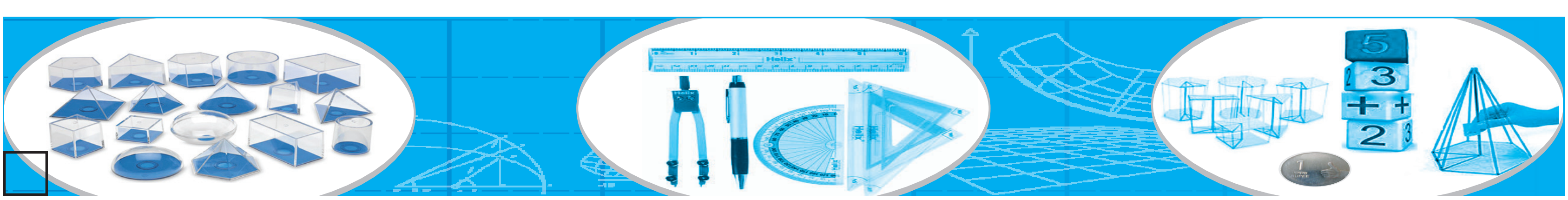
11. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक q का वर्ग $4q$ अथवा $4q+1$ के रूप में होता है।

12. 441, 567 तथा 693 का म.स. ज्ञात करने के लिए यूक्लीड की भाग कलन विधि का प्रयोग कीजिए।

13. सिद्ध कीजिए कि $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ अपरिमेय है।

14. दर्शाइए कि विषम धनात्मक पूर्णांक के वर्ग का रूप $6q+1$ या $6q+3$ हो सकता है जहाँ q एक पूर्णांक है।

15. दर्शाइए कि किसी धनात्मक पूर्णांक m का घन $4m$, $4m+1$ अथवा $4m+3$ के रूप में हो सकता है।



2

बीजगणित का शिक्षण

2.1 भूमिका

बीजगणित से विद्यार्थियों का प्रथम परिचय उच्च प्राथमिक स्तर पर कराया जाता है ! वास्तव में, इस स्तर पर उनका अंकगणित से बीजगणित की ओर परिगमन होता है। इस स्तर पर विद्यार्थीगण संख्या बोध से संख्या पैटर्न की ओर चलते हुए, संख्याओं में परस्पर सम्बन्ध को समझते हुए, और सामान्यीकरण को महसूस करते हुए, बीजगणितीय सर्वसमिकाओं से परिचय की ओर अग्रसर होते हैं। सघन भाषा के प्रयोग से, दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने की आवश्यकता 'चर' अथवा 'अज्ञात' से परिचय कराती है और बीजीय व्यंजक, बहुपद, रैखिक एवं द्विघात समीकरणों के विकास एवं उनके हल की ओर अग्रसर करती है। **बीजगणित** के अध्ययन से विद्यार्थियों को गणित की अमूर्त प्रकृति के बारे में जानकारी मिलती है। अनेक समस्याओं का हल प्राप्त करने में बीजगणितीय कौशल बहुत महत्वपूर्ण हैं। ज्यामिति एवं त्रिकोणमिति की उपपत्तियों में बीजगणितीय तकनीकों का प्रयोग किया जाता है। ये विद्यार्थियों को बीजीय तकनीकों की शक्ति का प्रदर्शन करते हैं।

2.2 व्यापक युक्तियाँ

1. भौतिक संसार / जीवन की स्थितियों से अभिप्रेरित करना।
2. शिक्षण-अधिगम के लिए आगमनिक-निगमनिक विधि का प्रयोग करना।
3. उदाहरणों की सहायता से व्याख्या करना।
4. 'क्यों' और 'कैसे' प्रश्न पूछना /प्रतिक्रिया के लिए कारण ढूँढ़ना।
5. बीजगणितीय कौशल विकसित करना।
6. विद्यार्थियों को अनुप्रयोग प्रकार की समस्याओं को हल करने योग्य बनाना।
7. समस्याओं के हल के लिए वैक्लिपक विधि विकसित करना तथा उनकी तुलना करना।

2.3 मुख्य संकल्पनायें

- एक चर के बहुपद।
- बहुपद के शून्यक ।
- बहुपद के गुणांकों एवं शून्यकों में सम्बन्ध।
- बहुपदों के गुणनखंडन।
- बीजगणितीय सर्वसमिकाएँ।
- एक बहुपद का दूसरे बहुपद से भाग और भाग कलन-विधि।

- दो चरों के रैखिक समीकरण।
- दो चरों के रैखिक समीकरणों के हल।
- दो चरों के रैखिक समीकरण-युग्म।
- रैखिक समीकरण-युग्मों के हल की आलेखीय विधि।
- रैखिक समीकरण-युग्मों का निम्नलिखित विधियों से हल :
  - (i) प्रतिस्थापन विधि
  - (ii) विलोपन विधि
  - (iii) वज्र-गुणन विधि
- द्विघात समीकरण।
- गुणनखंडन द्वारा द्विघात समीकरणों के हल।
- पूर्ण वर्ग विधि द्वारा द्विघात समीकरणों के हल।
- रैखिक समीकरण-युग्म और द्विघात समीकरण में परिवर्त्य समीकरण।
- समान्तर श्रेढ़ी।

2.4 शिक्षण युक्तियाँ

हम चर्चा करेंगे कि उपरोक्त में से कुछ मूल संकल्पनाओं का कक्षा में कैसे आदान-प्रदान किया जाए। ये संकल्पनायें इस प्रकार हैं :

(i) बहुपद (ii) बहुपद के शून्यक (iii) पूर्ण वर्ग विधि से द्विघात समीकरणों के हल

(iv) दो चरों के रैखिक समीकरण-युग्म

(i) बहुपद:

शिक्षक (T): विद्यार्थियों! हम अपनी पिछली कक्षाओं में चरों के विषय में अध्ययन कर चुके हैं। स्मरण कीजिए कि चरों को विभिन्न मान दिए जा सकते हैं। उदाहरण के लिए, विभिन्न दिवसों पर तापमान के विभिन्न मान हो सकते हैं और इसलिए यह एक चर है। एक कक्षा के विद्यार्थियों द्वारा गणित में प्राप्तांक विभिन्न होते हैं और इसलिए यह एक चर है। यदि हम कुछ आयतों की चर्चा करें, तो इनमें प्रत्येक आयत की लंबाई का मान विभिन्न होगा और इसलिए यह **चर** है। इसी प्रकार, आयतों की चौड़ाई भी एक चर है।

वर्गों की भुजाओं की लम्बाइयों के विषय में आप क्या कह सकते हैं ?

विद्यार्थी (S): यह भी एक चर है।

T: चरों को कैसे दर्शाते हैं ? चरों को निरूपित करने के लिए हम कौन से संकेत प्रयोग करते हैं ?

S: अंग्रेजी वर्णमाला के छोटे अक्षरों जैसे x, y, z, v इत्यादि से दर्शाते हैं।

T: बहुत अच्छा ! वर्ग की भुजा की लंबाई नामक चर को दर्शाने के लिए एक अक्षर का चयन कीजिए।

S: मान लीजिए वर्ग की भुजा की लंबाई x है।

T: इसका परिमाप क्या है ?

S: $x + x + x + x = 4x$ इकाई।

T: इसका क्षेत्रफल क्या होगा ?

S: वर्ग का क्षेत्रफल = लंबाई x लंबाई = $x \times x = x^2$ वर्ग इकाई।

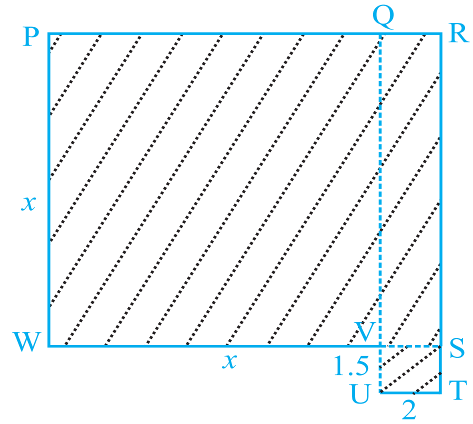
T: भुजा x के घन का आयतन क्या होगा ?

S: $x \times x \times x$ घन इकाई।

T: भुजाओं y, y एवं 2 इकाई वाले घनाभ का आयतन क्या होगा ?

S: $y \times y \times 2 = \dfrac{2y}{2}$ घन इकाई।

T: बहुत अच्छा ! निम्नलिखित आकृति को देखिए और बताइए कि इसका क्षेत्रफल कितना है।



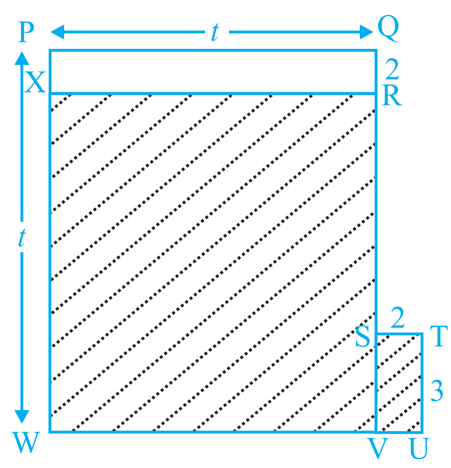
S: वर्ग PQVW का क्षेत्रफल = x^2 वर्ग इकाई

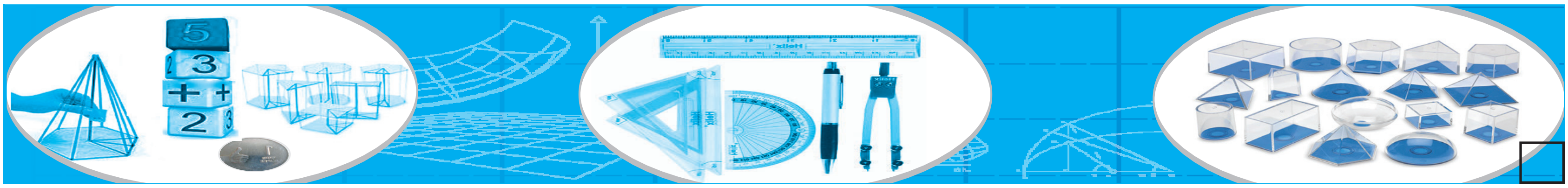
आयत QRSV का क्षेत्रफल = $2 \times x = 2x$ वर्ग इकाई

आयत VSTU का क्षेत्रफल = $1.5 \times 2 = 3$ वर्ग इकाई

इसलिए, इस आकृति का क्षेत्रफल = (x^2+2x+3) वर्ग इकाई

T: बहुत अच्छा ! निम्न आकृति में छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल क्या होगा?





S: छायांकित क्षेत्र आयत XRVW एवं आयत STUV से बना है।

T: वर्ग PQVW में से आयत XRVW कैसे प्राप्त किया जा सकता है ?

S: वर्ग PQVW में से आयत PQRX हटाने पर।

T: तो, क्या आप बता सकते हैं कि आयत XRVW का क्षेत्रफल क्या है ?

S: आयत XRVW का क्षेत्रफल = वर्ग PQVW का क्षेत्रफल – आयत PQRX का क्षेत्रफल

= $(t \times t - t \times 2)$ वर्ग इकाई

= $(t^2 - 2t)$ वर्ग इकाई

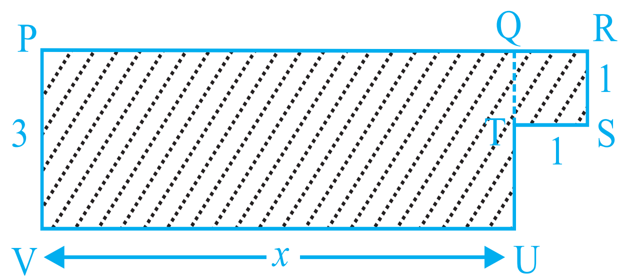
T: बहुत अच्छा ! आयत STUV का क्षेत्रफल कितना है ?

S: आयत STUV का क्षेत्रफल = $2 \times 3 = 6$ वर्ग इकाई

T: इसलिए छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल कितना है ?

S: छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल (t^2-2t+6) वर्ग इकाई !

T: निम्नलिखित आकृति का क्षेत्रफल क्या है ?



S: छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल

= आयत PQUV का क्षेत्रफल + वर्ग QRST का क्षेत्रफल

= $3 \times x + 1 \times 1 = (3x + 1)$ वर्ग इकाई

T: हमने अभी तक जो परिमाप, क्षेत्रफल एवं आयतन ज्ञात किए हैं, क्या आप उनकी सूची बना सकते हैं ?

S: $4x, x^2, x^3, 2y^2, x^2 + 2x + 3, t^2 - 2t + 6, 3x+1$

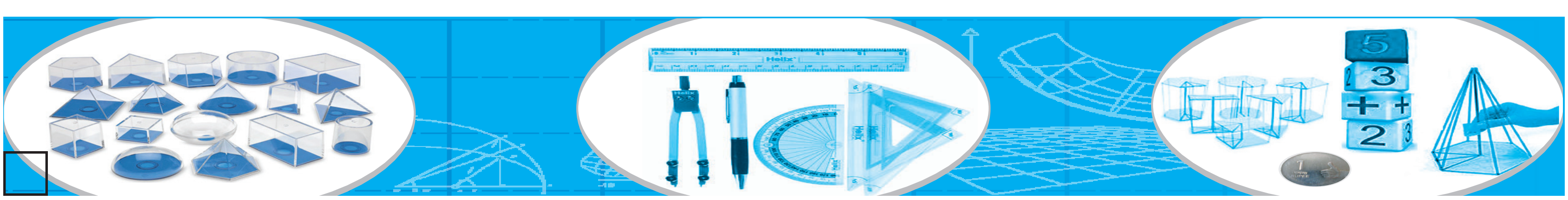
T: $4x, x^2, x^3, 2y^2, x^2 + 2x + 3, t^2 - 2t + 6, 3x+1$ इत्यादि के प्रकार के बीजीय व्यंजक **एक चर के बहुपद** कहलाते हैं। एक चर के कुछ अन्य बहुपदों के उदाहरण इस प्रकार हैं:

$u^3 - 2u^2 + 4u + 3,\ t^4 + 2t^3,\ z^2 - 3z,\ x^5 + 6x^2 - 3,\ v^{10}$

यहाँ पर $u^3 - 2u^2 + 4u + 3$ चर u का बहुपद है, $t^4 + 2t^3$ चर t का बहुपद है, $z^2 - 3z$ चर z का बहुपद है।

बताइये, बहुपद $v^7 - 2v^3 + 6$ का चर क्या है।

S: इसका चर v है।



T: बहुत अच्छा।

बहुपद $u^3 - 2u^2 + 4u + 3$ में $u^3, - 2u^2$, $4u$ और 3 बहुपद के पद कहलाते हैं। 3 में u सम्मिलित नहीं है और इसीलिए इसे अचर पद कहते हैं।

$u^3 - 2u^2 + 4u + 3$ के विभिन्न अचरेतर (चर) पदों में u के घातांक क्या हैं?

विद्यार्थियों की ओर से कोई उत्तर न मिलने पर!

T: पद u^3 में u का घातांक क्या है ?

S: 3

T: पद $- 2u^2$ में u का घातांक क्या है ?

S: 2

T: पद 4u में u का घातांक क्या है ?

कोई प्रतिक्रिया नहीं!

T: u^1 किसके समान है ?

S: u

T: क्या अब आप बता सकते हैं कि 4u में u का घातांक क्या है ?

S: 1

T: इस प्रकार $u^3 - 2u^2 + 4u + 3$ के अचरेतर पदों में u के घातांक क्रमश: 3, 2 और 1 हैं।

अब मुझे बताइए $z^2 - 3z$ के अचरेतर पदों में z के घातांक क्या हैं ?

S: 2 और 1

T: $x^5 + 6x^2 - 3$ के अचरेतर पदों में x के घातांक क्या हैं ?

S: 5 और 2

T: इस प्रकार, आप किसी बहुपद के अचरेतर पदों के चर के घातांकों के विषय में क्या कह सकते हैं ?

S: ये पूर्णांक हैं।

T: क्या केवल पूर्णांक ? उनके चिन्हों पर ध्यान दीजिए।

S: ये धनात्मक पूर्णांक हैं।

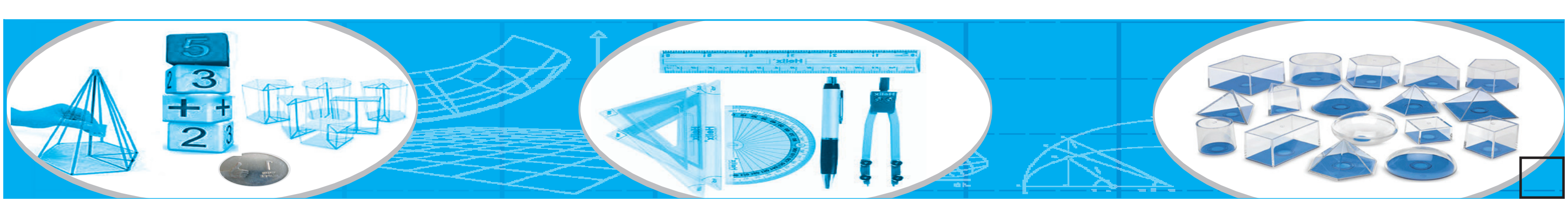
T: हाँ, एक चर के बहुपद के अचरेतर पदों के चर के घातांक धनात्मक पूर्णांक होते हैं।

क्या आप एक चर वाले बहुपदों के कुछ अन्य उदाहरण दे सकते हैं ?

S: $x^4 - 2x^3$, $y^3 - 3y^2 + 2y + 6$, $t^7 - 4t^6 + 5t^5 - 2t^4 + 3t^3 + t^2 - t + 9$ (उत्तर भिन्न-भिन्न हो सकते हैं)

T: बहुत अच्छा! बताइए क्या $x^2 + x^{-1}$ एक चर का बहुपद है ?

S_1: हाँ



S_2: नहीं सर !

T: क्यों ?

S_2: $x^2 + x^{-1}$ में, पद x^{-1} एक अचर पद नहीं है और x^{-1} में x का घातांक –1 है जो कि धनात्मक पूर्णांक नहीं हैं। इसलिए यह चर x का बहुपद नहीं है।

T: क्या $x^3 + 3x^2 + x^{\frac{1}{2}} + 1$ चर x का बहुपद है ?

S: नहीं। अचरेतर पद में x का घातांक $\frac{1}{2}$ है, जो एक धनात्मक पूर्णांक नहीं है।

T: बहुत अच्छा ! बहुपद $y^3 - 3y^2 + 2y + 6$ को $(1 \times y^3) + (-3) \times y^2 + (2 \times y) + 6$ लिखा जा सकता है। यहाँ 1 को y^3 का गुणांक कहते हैं, –3 कोy^2 का गुणांक और 2 को y का गुणांक कहते हैं।

बताइए, $u^5 - 4u^3 + u^2$ में u^2 का गुणांक क्या है।

S: $u^5 - 4u^3 + u^2$ में u^2 का गुणांक 1 है।

T: u^3 का गुणांक क्या है ?

S_1: 4

S_2: नहीं सर ! यह – 4 है।

T: बहुत अच्छा ! अब बतायें:

$x^5 + 4x^4 - 2x + 7$ में x^3 का गुणांक क्या है ?

S: इसमें x^3 का कोई पद नहीं है।

T: $0 \times x^3$ क्या है?

S: 0

अब मुझे बताइए कि $x^5 + 4x^4 - 2x + 7$ में x^3 का गुणांक क्या है।

S_1: इस बहुपद के किसी भी पद में x^3 नहीं है। अत: हम x^3 के गुणांक के विषय में कुछ नहीं कह सकते।

S_2: 0

T: क्यों ?

S: हम $x^5 + 4x^4 - 2x + 7$ को $x^5 + 4x^4 + (0 \times x^3) - 2x + 7$ लिख सकते हैं। इसलिए x^3 का गुणांक 0 है।

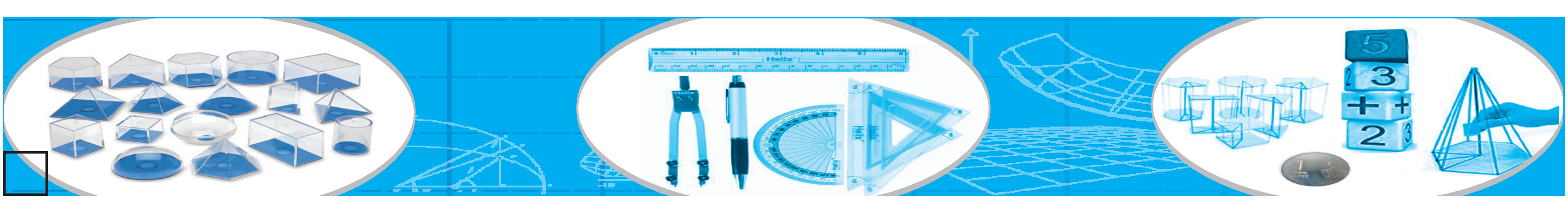
पुनरावलोकन प्रश्न:

1 चर x में, 3 पदों के बहुपद का एक उदाहरण दीजिए !

2. चर t के एक ऐसे बहुपद का उदाहरण दीजिए जिसमें केवल एक पद हो।

3. चर y के एक ऐसे बहुपद का उदाहरण दीजिए जिसमें y का गुणांक शून्य हो।

4. बहुपद $2x^5 - 4x^3 + x^2 + 3$ के अचरेतर पदों में x के घातांक क्या हैं?



5. बहुपद $y^3 - 2y$ में अचर पद क्या है ?

6. क्या $x^2 - 2x^{\frac{1}{3}}$ चर x का एक बहुपद है ? क्यों ?

7. क्या $t^3 - 4t^{-3}t$ का एक बहुपद है ? क्यों ?

शिक्षकों के लिए कार्य :
कोई वैकल्पिक स्थितियाँ सोचें जिनसे आप अपने विद्यार्थियों को बहुपदों से परिचित करायेंगे।

(ii) बहुपद के शून्यक

प्राय: विद्यार्थियों को चर के किसी दिए हुए मान के संगत बहुपद का मान ज्ञात करने में परेशानी होती है। यह परेशानी मुख्यत: इसलिए होती है कि उन्हें कुछ बातों की समझ नहीं होती।

उदाहरण: $3x^2$ का अर्थ $3 \times x^2$ है। हम अपने विद्यार्थियों को बताते हैं कि किसी बहुपद का मान प्राप्त करने के लिए हम बहुपद में चर का मान प्रतिस्थापित करते हैं। इसलिए जब $x = 2$ तो $3 \times x^2$ का मान ज्ञात करने के लिए, विद्यार्थी बिना सोचे समझे इसे 3×2^2 लिखने की बजाय 32^2 लिख देते हैं। इसी प्रकार $x = 3$ के लिए, $2x^2 + 3x - 1$ का मान ज्ञात करने के लिए, विद्यार्थी बिना सोचे-समझे $(2 \times 3^2) + (3 \times 3) - 1$ के स्थान पर 23^2+33-1 लिख देते हैं। इसलिए यह अत्यन्त आवश्यक है कि जब हम बहुपदों का परिचय कराते हैं, तो हम विद्यार्थियों को यह अवश्य समझायें कि यह बहुपद $(2 \times x \times x) + 3 \times x - 1$ है। विभिन्न बहुपदों के लिए विद्यार्थियों को इसका अभ्यास कराने से,वे (विद्यार्थी) चर के किसी दिए हुए मान के लिए बहुपद के मान का सही परिकलन करने में सक्षम होंगे। इसलिए, शिक्षक को बहुपद के शून्यकों की चर्चा करने से पहले यह अवश्य जान लेना चाहिए कि विद्यार्थीगण चर के किसी दिए हुए मान के लिए बहुपद के मान का सही परिकलन कर सकते हैं अथवा नहीं।

T: बहुपद $p(x) = 2x^3 + 5$ को लीजिए। यदि आप $p(x)$ में x के स्थान पर 1 प्रतिस्थापित करते हैं, तो $p(x)$ का क्या मान प्राप्त होगा ?

S: $p(1) = 2 \times 1^3 + 5 = 2 \times 1 + 5 = 7$

T: $p(x) = 2x^3 + 5$ में x को 1 से प्रतिस्थापित करने पर हमें 7 मान प्राप्त होता है। यह संख्या 7, $x = 1$ के लिए $p(x) = 2x^3 + 5$ का मान कहलाती है।

यदि हम $p(x) = 2x^3 + 5$ मे x को -1 से प्रतिस्थापित करते हैं, तो हम क्या मान प्राप्त करेंगे ?

S: $p(-1) = 2 \times (-1)^3 + 5 = -2 + 5 = 3$

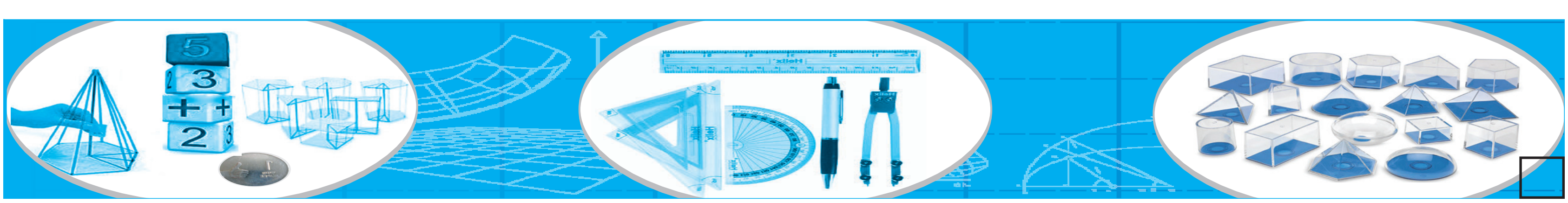
$x = -1$ के लिए, $p(x) = 2x^3 + 5$ का मान 3 है।

T: बहुत अच्छा ! $x = 0$ के लिए, $q(x) = x^3 - 2x^2 + 3x - 6$ का मान क्या है ?

S: $q(0) = 0^3 - (2 \times 0^2) + 3 \times 0 - 6 = -6$

$x = 0$ के लिए, $q(x)$ का मान -6 है।

T: $x = 1$ के लिए, $q(x)$ का मान क्या है ?



S: $q(1)=1^3-(2\times1^2)+(3\times1)-6=-4$ $x=1$ के लिए, $q(x)$ का मान -4है।

T: $x=-1$के लिए, $q(x)$ का मान क्या है ?

S: $q(-1)=(-1)^3-2\times(-1)^2+3\times(-1)-6=-12$

$x=-1$ के लिए, $q(x)$ का मान -12 है।

(विद्यार्थियों को पूर्ण वाक्यों में उत्तर देने के लिए प्रोत्साहित करें)

T: $x=2$ के लिए, $q(x)$ का क्या मान है ?

S: $q(2)=2^3-(2\times2^2)+(3\times2)-6=0$

$x=2$ के लिए, $q(x)$ का मान शून्य (0) है।

T: आपने देखा कि $x=0, 1,-1$ के लिए $q(x)$ के मान शून्य (0) नहीं हैं, परन्तु $x=2$ के लिए, इसका मान शून्य (0) है। $q(x)$ में x के लिए मान 2 रखने पर, $q(x)$ का मान 0 है। '2' को $q(x)$ का **शून्यक** कहते हैं।

अब $p(x)=x^2-4x+3$ का मान $x=1$ के लिए ज्ञात करें।

S: $p(1)=1^2-(4\times1)+3=0$

$x=1$ के लिए, $p(x)$ का मान शून्य (0) है।

T: इस प्रकार, आप बहुपद $p(x)$ के लिए '1' के विषय में क्या कह सकते हैं ?

S: 1, x का वह मान है जिसके लिए $p(x)$ का मान 0 है। इसलिए, 1 बहुपद $p(x)=x^2-4x+3$ का एक शून्यक है।

T: $x=3$ के लिए, $p(x)=x^2-4x+3$ का मान क्या है ?

S: $p(3)=3^2-(4\times3)+3=0$ है। इस प्रकार, हम देखते हैं कि $x=3$ के लिए भी $p(x)=x^2-4x+3$ का मान शून्य (0) है। इसलिए, 3 भी बहुपद $q(x)$ का एक शून्यक है।

T: $x=1$ और $x=3$ के लिए , $p(x)=x^2-4x+3$ के मान क्रमश: $p(1)$ और $p(3)$ शून्य (0) हैं तथा हमने 1 और 3 को $p(x)=x^2-4x+3$ के शून्यक कहा है।

इसलिए, क्या अब आप मुझे बता सकते हैं कि कोई संख्या c किसी बहुपद का शून्यक कब कहलाती है ?

S: यदि $x=c$ के लिए $p(x)$ का मान शून्य है, अर्थात् यदि $p(c)=0$ है,तो c बहुपद $p(x)$ का शून्यक कहलाता है।

T: हाँ, यदि किसी बहुपद $q(x)$ के लिए $q(a)=0$ है, तो 'a' ,बहुपद $q(x)$ का एक शून्यक है।

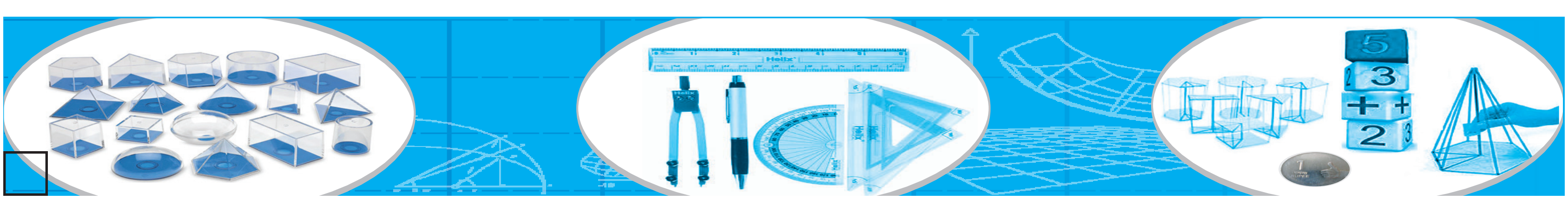
अब बताइये, क्या -1, बहुपद x^2+4x+3 का शून्यक है।

S: $x=-1$ के लिए, x^2+4x+3 का मान $(-1)^2+4\times(-1)+3=1-4+3=0$ है। इसलिए $-1, x^2+4x+3$ का एक शून्यक है।

T: क्या $1, x^2+4x+3$ का एक शून्यक है ?

S: $(1)^2+(4\times1)+3=1+4+3=8\neq0$ है। इसलिए, $1, x^2+4x+3$ का एक शून्यक नहीं है।

T: क्या $-3, x^2+4x+3$ का एक शून्यक है ?



S: $(-3)^2 + (4 \times (-3)) + 3 = 9 - 12 + 3 = 0$

इसलिए $-3, x^2 + 4x + 3$ का एक शून्यक है।

T: क्या $2, x^2 - 2x + 3$ का एक शून्यक है ?

S: $(2)^2 - (2 \times 2) + 3 = 4 - 4 + 3 = 3 \neq 0$

इसलिए, $2, x^2 - 2x + 3$ का एक शून्यक नहीं है।

T: क्या $-2, y^3 + 2y^2 - 2y - 4$ का एक शून्यक है ?

S: $(-2)^3 + [2 \times (-2)^2] - 2(-2) - 4 = -8 + 8 + 4 - 4 = 0$

इसलिए $-2, y^3 + 2y^2 - 2y - 4$ का एक शून्यक है।

T: बहुत अच्छा ! जाँच कीजिए कि क्या चरों के दिए हुए मान संगत बहुपदों के शून्यक हैं ?

1. $x = 1, x^3 - 2x + 1$
2. $y = 0, y^2 - 2y + 1$
3. $y = -2, y^3 + 2y^2 - y - 4$
4. $t = 3, t^2 - 2t - 3$
5. $t = 1, t^2 + 2t - 1$
6. $v = 0, v^3 - 3v^2 - 4v$

विद्यार्थी उपरोक्त समस्याओं को सहयोगात्मक – अधिगम विधि के अन्तर्गत समूहों में हल करते हैं, यदि आवश्यकता पड़ती है, तो शिक्षक उनकी मदद करता है और विद्यार्थियों को उनके अपने तरीके से उत्तरों के विषय में चर्चा करने के लिए प्रोत्साहित करता है।

T: क्या आप अनुमान लगा सकते हैं कि $x = 0$ बहुपद $p(x)$ के लिए एक शून्यक कब होगा? सोचिए!

कोई प्रतिक्रिया नहीं।

T: जब हम दिए हुए बहुपद के सभी पदों में चर के स्थान पर शून्य (0) प्रतिस्थापित करते हैं, तो क्या होता है ?

S: सभी पदों का मान शून्य हो जाता है।

T: क्या आपको पूर्ण विश्वास है ?

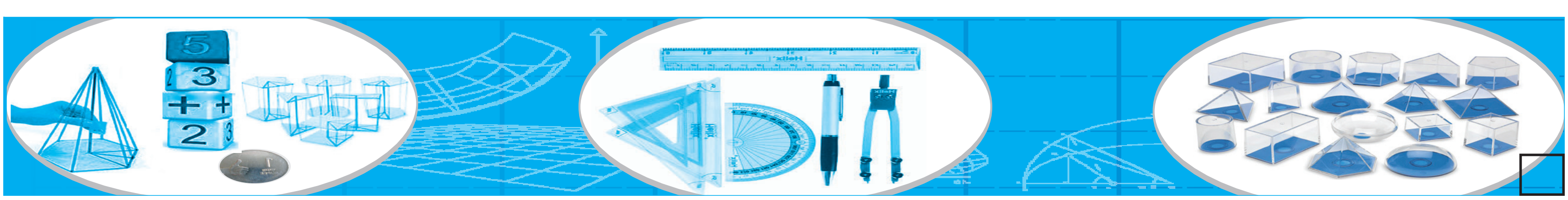
S: अचर पद शून्य नहीं होता। यह वैसा ही रहता है जैसा पहले था।

T: इसलिए जब हम चर के स्थान पर शून्य प्रतिस्थापित करते हैं, तो बहुपद का मान क्या होता है ?

S: बहुपद का मान बहुपद के अचर पद के बराबर होता है।

T: परन्तु 0 को बहुपद का शून्यक होने के लिए, शून्य पर बहुपद का मान शून्य होना चाहिए। इसलिए, यदि बहुपद का अचर पद शून्य नहीं है, तो क्या 0 दिए हुए बहुपद का शून्यक हो सकता है ?

S: यदि दिए हुए बहुपद का अचर पद 0 है, तो ही 0 उस बहुपद का शून्यक होता है।



T: बहुत अच्छा !

प्राय: विद्यार्थियों को यह समझने में परेशानी होती है कि एक शून्येतर संख्या भी किसी बहुपद का ‘ शून्यक’ हो सकता है। इसके लिए अध्यापक द्वारा अनेक निदर्शी उदाहरण एंव प्रभावशाली व्याख्या दी जानी चाहिए जिससे विद्यार्थी यह समझ सकें कि एक शून्येतर संख्या भी बहुपद का ‘ शून्यक’ हो सकती है।

शिक्षकों के लिए कार्य:

विद्यार्थियों द्वारा बहुपद के शून्यकों के अधिगम के लिए एक वैकल्पिक शिक्षक – शिष्य वार्तालाप (कार्य विवरण) लिखिए।

(iii) पूर्ण वर्ग विधि द्वारा द्विघात समीकरणों का हल:

T: समीकरण $x^2 - 4 = 0$ को लीजिए। यह किस प्रकार का समीकरण है ?

S: यह चर x का एक द्विघात समीकरण है।

T: इस द्विघात समीकरण के विषय में कोई विशेष बात ?

S: इसमें x की प्रथम घात वाला पद नहीं है।

T: आइए $x^2 - 4 = 0$ को हल करते हैं, अर्थात् x का क्या मान है जिसके लिए $x^2 - 4 = 0$ हो ?

$x^2 - 4 = 0$ के दोनों पक्षों में 4 जोड़ने पर, क्या प्राप्त होता है ?

S: $x^2 = 4$

T: x के किस मान के लिए $x^2 = 4$ है ?

S: $x = 2$

T: बहुत अच्छा ! क्या x का कोई अन्य मान भी है जिसके लिए $x^2 = 4$ है ?

S: $x = -2$

T: $(2)^2 = 4$ और $(-2)^2 = 4$ है। संख्या 4 के लिए 2 एवं -2 क्या हैं?

S: ये 4 के वर्गमूल हैं।

T: इसलिए, x का वह मान कैसे ज्ञात किया जाए जिसके लिए $x^2 = 4$ हो?

S: 4 का वर्गमूल लेकर।

T: क्या, आप बता सकते हैं कि हमने $x^2 - 4 = 0$ को कैसे हल किया ?

S: $x^2 - 4 = 0$ को हल करने के लिए, हमने दोनों पक्षों में 4 जोड़ा है, जिससे $x^2 = 4$ प्राप्त हुआ और फिर वर्गमूल लिया।

T: हाँ, मान लीजिए $x^2 - 4 = 0$ की बजाय हमने $x^2 - 7 = 0$ लिया होता, तो क्या आप इसे हल कर सकते हैं ?

S: हाँ, दोनों पक्षों में 7 जोड़ने से हमें $x^2 = 7$ प्राप्त होता है।

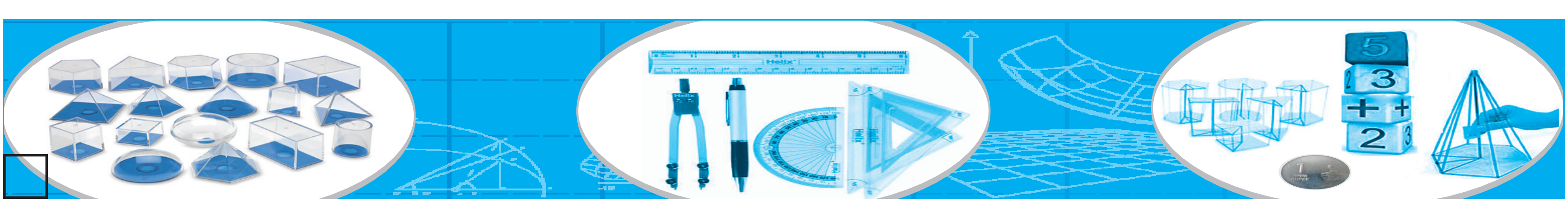
इसलिए, $x = \pm\sqrt{7}$ है।

T: बहुत अच्छा ! अब समीकरण $x^2 + 4 = 0$ को हल कीजिए।

S: दोनों पक्षों में -4 जोड़ने पर हमें $x^2 = -4$ प्राप्त होता है।

T: अब, x का मान क्या है ?

S: हम ज्ञात नहीं कर सकते।



T: क्यों ?

S: ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है, जिसका वर्ग – 4 है।

T: समीकरण $x^2 + k = 0$ को हल कीजिए।

S: दोनो पक्षों में – k जोड़ने पर, $x^2 = -k$ प्राप्त होता है।

T: यदि k धनात्मक है, तो – k ऋणात्मक है और ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है, जिसका वर्ग – k है। अत:, k का ऐसा कोई मान नहीं है, जिसके लिए $x^2 + k = 0$ हो । अत: यदि k धनात्मक है, तो समीकरण $x^2 + k = 0$ का वास्तविक संख्याओं में कोई हल नहीं है।

S: यदि k ऋणात्मक है, तो क्या होगा ?

T: यदि k ऋणात्मक है, तो – k धनात्मक है और इसलिए हम – k का वर्गमूल ज्ञात कर सकते हैं। इस स्थिति में, $x^2 + k = 0$ के हल $\pm\sqrt{(-k)}$ हैं।

अब समीकरण $[(x - (3/2)]^2 - 9 = 0$ लीजिए। इस समीकरण को हल कीजिए।

S: दोनों पक्षों में 9 जोड़ने से, हमें $[x - (3/2)]^2 = 9$ प्राप्त होता है।

वर्गमूल लेने पर, $x - (3/2) = \pm 3$

T: परन्तु हम x का मान ज्ञात करना चाहते हैं।

S: $x = \pm 3 + (3/2)$, अर्थात् $3 + (3/2)$ अथवा $-3 + (3/2)$, अर्थात् $(9/2)$ अथवा $-(3/2)$

इसलिए, $[x - (3/2)]^2 - 9 = 0$ के हल $(9/2)$ एवं $-(3/2)$ हैं।

T: बहुत अच्छा ! आइए एक अन्य विद्यार्थी समीकरण $(x + 5)^2 - 2 = 0$ को हल करे।

S: दोनों पक्षों में 2 जोड़ने पर, $(x + 5)^2 = 2$ प्राप्त होता है।

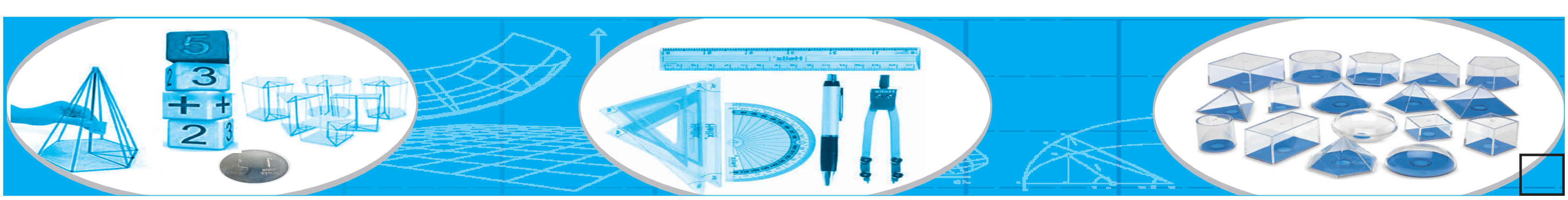
वर्गमूल लेने पर, $x + 5 = \pm\sqrt{2}$

इसलिए, $x = -5 \pm \sqrt{2}$, अर्थात् $x = -5 + \sqrt{2}$ अथवा $-5 - \sqrt{2}$ है।

T: समीकरण $[x - (3/2)]^2 - 9 = 0$ पर पुन: ध्यान दीजिए। क्या आप बायें पक्ष को प्रसारित कर सकते हैं और सरल कर सकते हैं?

$$\begin{aligned}[x - (3/2)]^2 - 9 &= x^2 - 2 \times x \times (3/2) + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 9 \\ &= x^2 - 3x + \frac{9}{4} - 9 \\ &= x^2 - 3x - \frac{27}{4}\end{aligned}$$

T: इसलिए, समीकरण $[x - (\frac{3}{2})]^2 - 9 = 0$ और $x^2 - 3x - \left(\frac{27}{4}\right) = 0$



एक जैसे हैं। आप $x^2 - 3x - \left(\frac{27}{4}\right) = 0$ के हल के विषय में क्या कह सकते हैं ?

S: $x^2 - 3x - \left(\frac{27}{4}\right) = 0$ और $[x - (3/2)]^2 - 9 = 0$ के हल एक जैसे हैं। इसलिए $x^2 - 3x - \left(\frac{27}{4}\right) = 0$ के हल $\left(\frac{9}{2}\right)$ और $-\left(\frac{3}{2}\right)$ हैं।

T: इसी प्रकार, वर्ग को प्रसारित कीजिए और $(x + 5)^2 - 2 = 0$ को सरल कीजिए।

S: $x^2 + 10x + 25 - 2 = 0$, अर्थात् $x^2 + 10x + 23 = 0$

T: अत:, $x^2 + 10x + 23 = 0$ के हल क्या हैं?

S: $x^2 + 10x + 23 = 0$ के हल $-5 + \sqrt{2}$ तथा $-5 - \sqrt{2}$ हैं। इस विद्यार्थियों से इस उत्तर की किस प्रकार अपेक्षा कर सकते हैं?

T: इस प्रकार, यदि हम $x^2 - 3x - \left(\frac{27}{4}\right) = 0$ को $[x - (3/2)]^2 - 9 = 0$ लिख लें, तो हम इसे हल कर सकते हैं।

इसी प्रकार, यदि हम $x^2 + 10x + 23 = 0$ को $(x + 5)^2 - 2 = 0$ लिख लें,तो हम इसे हल कर सकते हैं।

परन्तु $x^2 - 3x - (\frac{27}{4}) = 0$ को $(x - (3/2))^2 - 9 = 0$ कैसे लिखें ?

इन दो समीकरणों में आप क्या अन्तर देखते हैं ?

S: $x^2 - 3x - (\frac{27}{4}) = 0$ में, x का पद $- 3x$ दिखाई दे रहा है, परन्तु= $[x - (\frac{3}{2})]^2 - 9 = 0$ में x का पद नहीं है।

T: $[x - (\frac{3}{2})]^2 - 9 = 0$ और $x^2 - 3x - \left(\frac{27}{4}\right) = 0$ एक जैसे हैं, इसलिए $[x - (\frac{3}{2})]^2 - 9 = 0$ में भी $-3x$ है, परन्तु यह दिखाई नहीं देता। यह $[x - (\frac{3}{2})]^2$ में सम्मिलित है।

वास्तव में, $x^2 - 3x$

$$= x^2 + (2 \times x \times (-\frac{3}{2}))$$

$$= x^2 + [2 \times x \times (-3/2)] + \left(-\frac{3}{2}\right)^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

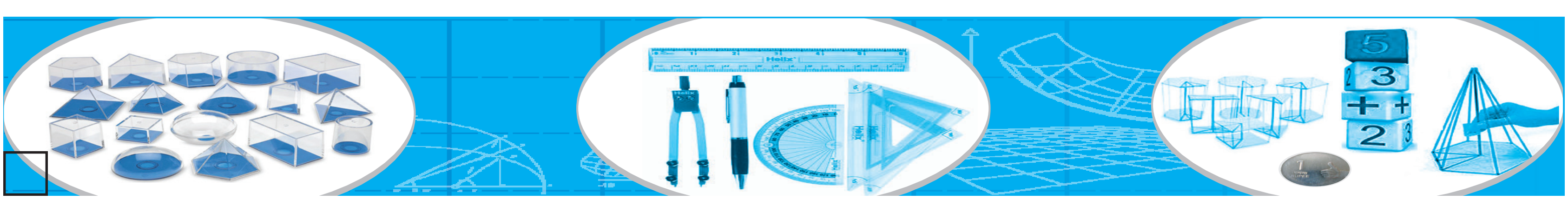
$$= [x - (\frac{3}{2})]^2 - \left(-\frac{3}{2}\right)^2$$

अत: $\left(-\frac{3}{2}\right)^2$ को जोड़कर एवं घटाकर $x^2 - 3x$ को पूर्ण वर्ग $[x - (\frac{3}{2})]^2$ के अन्दर ले लिया गया है।

इसलिए, $x^2 - 3x - (27/4) = [x - (\frac{3}{2})]^2 - (-\frac{3}{2})^2 - (\frac{27}{4})$

$$= [x - (3/2)]^2 - \left(\frac{9}{4}\right) - \left(\frac{27}{4}\right)$$

$$= [x - (3/2)]^2 - 9 \left(\because -\frac{9}{4} - \frac{27}{4} = \frac{-9-27}{4} = \frac{-36}{4} = -9\right)$$



इस प्रकार $(-\frac{3}{2})^2$ जोड़कर एवं घटाकर, $x^2 - 3x - (\frac{27}{4}) = 0$, $(x - (\frac{3}{2}))^2 - 9 = 0$ में परिवर्तित हो गया है।

$(-\frac{3}{2})^2$ जोड़कर एवं घटाकर $x^2 - 3x - (\frac{27}{4}) = 0$ को $(x - (\frac{3}{2}))^2 - 9 = 0$ लिखने की विधि को **पूर्ण वर्ग बनाने की** विधि कहते हैं।

$x^2 + 10x + 23 = 0$ को इस विधि से लिखिए।

S: $x^2 + 10x \quad = x^2 + (2 \times x \times 5)$

$= x^2 + (2 \times x \times 5) + 5^2 - 5^2$

$= (x + 5)^2 - 25$

इसलिए, $x^2 + 10x + 23 = (x + 5)^2 - 25 + 23 = (x + 5)^2 - 2$

T: इस प्रकार, 5^2 जोड़कर एवं घटाकर, $10x$ को $(x + 5)^2$ के अन्दर लाया गया है और हमने $x^2 + 10x + 23 = 0$ को $(x + 5)^2 - 2 = 0$ के रूप में लिखा है।

अत:, पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से, समीकरण $x^2 + 10x + 23 = 0$ को $(x + 5)^2 - 2 = 0$ के रूप में परिवर्तित करने के पश्चात् और फिर $(x + 5)^2 - 2 = 0$ को हल करने के पश्चात्, $x^2 + 10x + 23 = 0$ का हल प्राप्त किया जाता है।

T: पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से $x^2 + 6x - 7 = 0$ को हल कीजिए।

S: सर्वप्रथम हमें $x^2 + 6x$ को लेना चाहिए और इसे पुन: इस प्रकार लिखना चाहिए:

$x^2 + 6x = x^2 + (2 \times x \times 3)$

$= x^2 + (2 \times x \times 3) + 3^2 - 3^2$

$= (x + 3)^2 - 9$

इसलिए , $x^2 + 6x - 7 = (x + 3)^2 - 9 - 7 = (x + 3)^2 - 16$

T: बहुत अच्छा ! आपने 3^2 जोड़ा है और घटाया है। परन्तु आपने 3^2 क्यों जोड़ा और घटाया है ?

S: क्योंकि $6x = 2 \times x \times 3$

यही कारण है कि मैंने 3^2 जोड़ा है और घटाया है।

T: बहुत अच्छा ! अब समीकरण $x^2 + 6x - 7 = 0$ को हल करते हुए आगे बढ़िए।

S: $x^2 + 6x - 7 = 0$ को हल करना वैसा ही है जैसा $(x + 3)^2 - 16 = 0$ को हल करना। $(x + 3)^2 - 16 = 0$ के दोनों पक्षों में 16 जोड़ने पर $(x + 3)^2 = 16$ प्राप्त होता है।

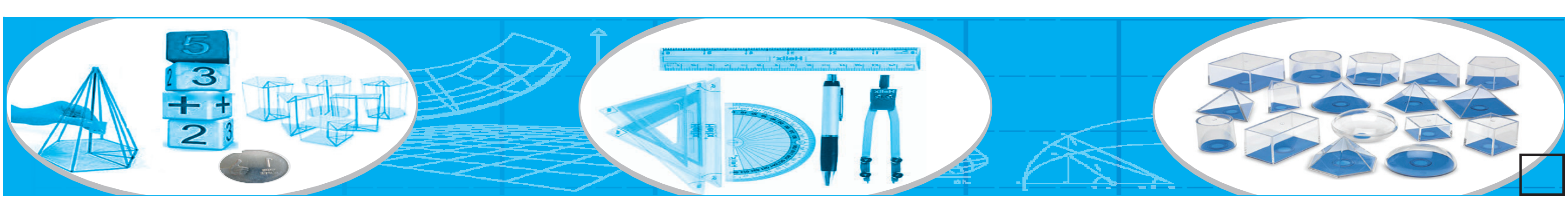
इसलिए, $x + 3 = \pm 4$

अर्थात् $x = 1$ अथवा -7 है।

इसलिए , $x^2 + 6x - 7 = 0$ के हल 1 और -7 हैं।

T: बहुत अच्छा ! पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से, अब $x^2 - 3x + 4 = 0$ को हल कीजिए।

S: $x^2 - 3x = x^2 - [2 \times x \times (3/2)]$



$= x^2 - [2 \times x \times (\frac{3}{2})] + (\frac{3}{2})^2 - (\frac{3}{2})^2$

$= [x - (\frac{3}{2})]^2 - \frac{9}{4}$

इसलिए, $x^2 - 3x + 4 = [x - (\frac{3}{2})]^2 - \frac{9}{4} + 4 = [x - (\frac{3}{2})]^2 + \frac{7}{4}$

अत:, $x^2 - 3x + 4 = 0$ और $(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} = 0$ एक समान हैं।

T: अब x के लिए हल कीजिए।

S: $[x - (\frac{3}{2})]^2 + \frac{7}{4} = 0$

इसलिए $[x - (\frac{3}{2})]^2 = -\frac{7}{4}$

परन्तु हम $-\frac{7}{4}$ का वर्गमूल ज्ञात नहीं कर सकते।

T: क्यों ?

S: क्योंकि ऐसी कोई वास्तविक संख्या नहीं है, जिसका वर्ग $(-\frac{7}{4})$ हो।

T: तो, $[x - (\frac{3}{2})]^2 + \frac{7}{4} = 0$ का हल क्या है?

S: कोई हल नहीं है।

T: क्यों ?

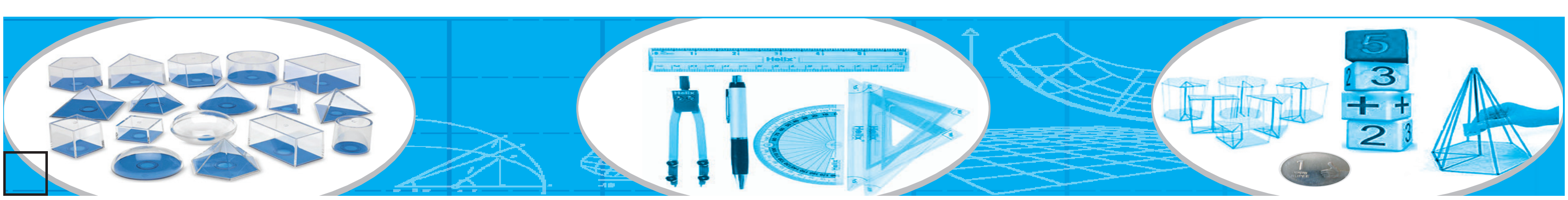
S: क्योंकि $x^2 - 3x + 4 = 0$ और $(x - (\frac{3}{2}))^2 + \frac{7}{4} = 0$ के हल एक समान हैं और वास्तविक संख्याओं के लिए $[x - (\frac{3}{2})]^2 + \frac{7}{4} = 0$ का कोई हल नहीं है।

T: अत: पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से आप यह ज्ञात कर सकते हैं कि किसी द्विघात समीकरण का हल है अथवा नहीं है। यदि इसके हल हैं, तो आप उन्हें ज्ञात कर सकते हैं।

पुनरावलोकन प्रश्न:

पूर्ण वर्ग बनाने की विधि से, निम्नलिखित द्विघात समीकरणों को हल कीजिए:

1. $x^2 - 5x + 6 = 0$
2. $x^2 + 2x + 3 = 0$
3. $y^2 - \frac{2}{3}y - \frac{8}{9} = 0$
4. $3x^2 - 4x + 5 = 0$



5. $t^2 - t + 2 = 0$

ये समस्याएँ सहयोगात्मक – अधिगम विधि के अन्तर्गत समूहों में हल की जा सकती हैं। प्रत्येक विद्यार्थी को अधिगम प्रक्रिया में भाग लेने के लिए प्रोत्साहित कीजिए और जो कुछ उन्होंने ज्ञात किया है उस पर परस्पर चर्चा कराई जाए, प्रश्न पूछे जाएँ, प्रतिक्रियाओं पर चर्चा की जाए और प्रतिक्रियाओं के समर्थन में कारण पूछे जाएँ।

T: आइए देखते हैं कि पूर्ण वर्ग बनाने की विधि किस प्रकार कुछ समस्याओं को हल करने में प्रयोग की जा सकती है। निम्नलिखित समस्या पर चर्चा कीजिए:

एक रेलगाड़ी समान चाल से 360 km दूरी तय करती है। यदि रेलगाड़ी की चाल 5 km प्रति घंटा अधिक होती, तो उस यात्रा को तय करने में रेलगाड़ी को 1 घंटे का कम समय लगता। रेलगाड़ी की मूल चाल क्या है ?

समस्या को पढ़िए और बताइए कि आपको क्या ज्ञात करना है।

S: रेलगाड़ी की मूल चाल

T: तो, अज्ञात क्या है ?

S: रेलगाड़ी की मूल चाल

T: रेलगाड़ी की मूल चाल को दर्शाने के लिए एक संकेत का प्रयोग कीजिए।

S: मान लीजिए कि रेलगाड़ी की मूल चाल x km प्रति घंटा है (विद्यार्थियों को पूर्ण वाक्य में प्रतिक्रिया व्यक्त करने के लिए प्रोत्साहित करें)

T: क्या ज्ञात है? समस्या में क्या दिया हुआ है?

S: रेलगाड़ी 360 km चलती है।

T: इसलिए, रेलगाड़ी द्वारा तय की गई दूरी कितनी है?

S: तय की गई दूरी = 360 km

T: आपको समय के बारे में भी कुछ सूचना दी गई है। यदि तय की गई दूरी 360 km है और रेलगाड़ी की चाल x km प्रति घंटा है, तो रेलगाड़ी द्वारा इस यात्रा के लिए लिया गया समय कितना है?

S: $$\text{नया समय} = \frac{\text{तय की गई दूरी}}{\text{रेलगाड़ी की नई चाल}} = \frac{360}{x+5} \text{ घन्टे}$$

T: बहुत अच्छा ! रेलगाड़ी द्वारा लिए गए समय के संबंध में आपको कुछ और अधिक सूचना दी गई है। समस्या को एक बार फिर पढ़िए और बताइए कि यह क्या सूचना है।

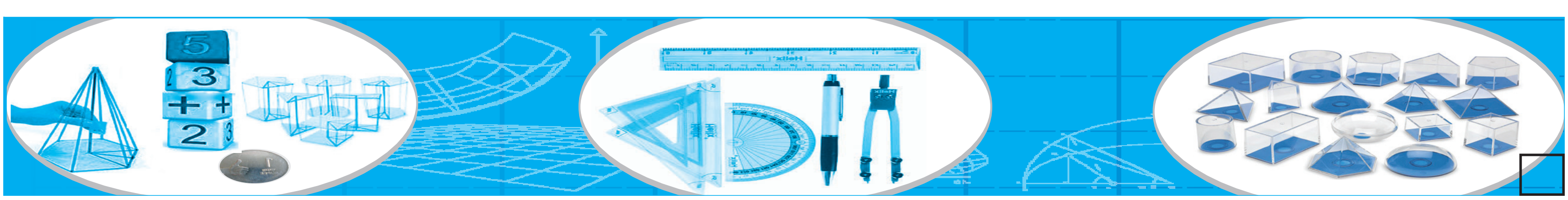
S: यदि चाल 5 km प्रति घंटा अधिक होती, तो रेलगाड़ी उस यात्रा को तय करने में 1 घंटा कम समय लेती।

T: यदि चाल 5 km प्रति घंटा अधिक है, तो नई चाल क्या है?

S: $(x + 5)$ km प्रति घंटा

T: क्यों ?

S: मूल चाल x km प्रति घंटा है।



T: बहुत अच्छा! नई चाल से गाड़ी, यात्रा पूरी करने में कितना समय लेगी ?

T: रेलगाड़ी, मूल चाल से $\frac{360}{x}$ घन्टे का समय लेती है और नई चाल से $\frac{360}{x+5}$ घन्टे का समय लेती है। मूल चाल एवं नई चाल के समय के संबंध में समस्या में क्या दिया हुआ है?

S: रेलगाड़ी द्वारा नई चाल से लिया गया समय, मूल चाल से लिए गए समय से एक घंटा कम है।

T: क्या आप इसे एक समीकरण के रूप में लिख सकते हैं?

S: $360/(x + 5) = (360/x) - 1$, अर्थात् $(360/(x + 5)) - (360/x) + 1 = 0$

T: परन्तु अज्ञात x, हर में है। क्या– आप इसे अंश में ला सकते हैं ?

S: हाँ दोनों पक्षों के सभी पदों को $(x + 5)\,x$ से गुणा करने पर ।

T: इसे कीजिए।

S: $360x - 360(x + 5) + (x + 5)x = 0$

अर्थात् $360x - 360x - 360 \times 5 + x^2 + 5x = 0$

अर्थात् $x^2 + 5x - 1800 = 0$

T: रेलगाड़ी की मूल चाल x km प्रति घंटा किस समीकरण को संतुष्ट करती है?

S: x, द्विघात समीकरण $x^2 + 5x - 1800 = 0$ को संतुष्ट करता है।

T: हमें रेलगाड़ी की मूल चाल x ज्ञात करनी है। x ज्ञात करने के लिए, आपको यह समीकरण x के लिए हल करनी है। इसलिए, $x^2 + 5x - 1800 = 0$ को x के लिए हल कीजिए।

S:
$$\begin{aligned} x^2 + 5x &= x^2 + (2 \times x) \times (5/2) \\ &= x^2 + (2 \times x) \times (5/2) + (5/2)^2 - (5/2)^2 \\ &= [x + (5/2)]^2 - 25/4 \end{aligned}$$

इसलिए $x^2 + 5x - 1800 = (x + (5/2))^2 - 25/4 - 1800 = (x + (5/2))^2 - 7225/4$

अत: समीकरण $x^2 + 5x - 1800 = 0$ और $[x + (5/2)]^2 - 7225/4 = 0$ एक जैसे समीकरण हैं ।

इसलिए $x + (5/2) = \pm\sqrt{\frac{7225}{4}} = +\frac{\sqrt{7225}}{2}$

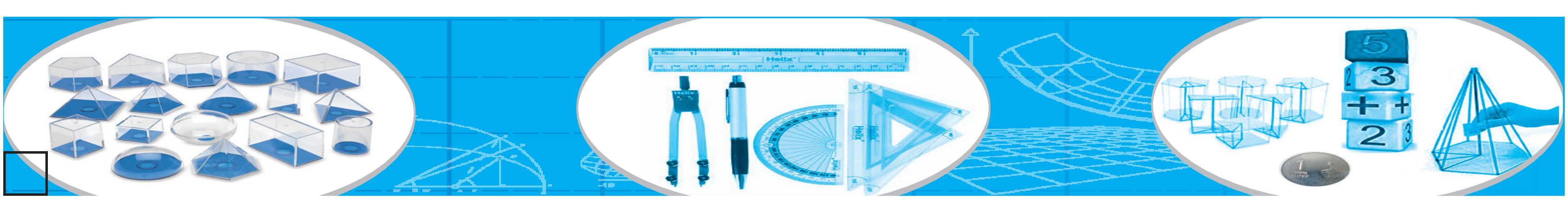
T: आप पहले से ही जानते है कि किसी संख्या का वर्गमूल कैसे ज्ञात किया जाता है। वर्गमूल ज्ञात कीजिए।

S:

5	7225
5	1445
17	289
17	17
	1

$\therefore \sqrt{7225} = \sqrt{5 \times 5 \times 17 \times 17}$

(अभाज्य गुणनखंडन)



अतः $\sqrt{7225} = \sqrt{5\times5\times17\times17} = 5\times17 = 85$

इसलिए $x = -(5/2) + (85/2)$ अथवा $x = -(5/2) - (85/2)$

अर्थात् $x = 40$ अथवा -45

T: परन्तु x क्या है? क्या यह ऋणात्मक हो सकता है?

S: x, रेलगाड़ी की मूल चाल है। इसलिए यह ऋणात्मक नहीं हो सकती। इसलिए $x = 40$ km प्रति घंटा

T: बहुत अच्छा! इस प्रकार आपने रेलगाड़ी की मूल चाल 40 km प्रति घंटा ज्ञात कर ली है।

पुनरावलोकन प्रश्न:

एक आयताकार खेत का विकर्ण छोटी भुजा से 60 मीटर अधिक है। यदि बड़ी भुजा छोटी भुजा से 30 मीटर अधिक है, तो खेत की भुजाएँ ज्ञात कीजिए।

> **शिक्षकों के लिए कार्य :**
> आयताकार खेत की उपरोक्त समस्या के लिए शिक्षक – विद्यार्थी वार्तालाप लिखिए जिससे विद्यार्थी इस समस्या को हल कर सकें।

(iv) दो चरों के रैखिक समीकरण-युग्म:-

T: आप पूर्व कक्षाओं में एक चर के रैखिक समीकरणों का अधिगम कर चुके हैं। क्या आप इनके कुछ उदाहरण दे सकते हैं?

S: $3x + 5 = 0$, $y - 2 = 5$, $2x - 3 = 1$

T: ये एक चर के रैखिक समीकरण क्यों कहलाते हैं?

S: प्रत्येक समीकरण में एक चर है।

T: हाँ, परन्तु ये रैखिक समीकरण क्यों कहलाते हैं?

S: क्योंकि प्रत्येक समीकरण में अचरेतर पद की घात 41 है।

T: अब, क्या आप बता सकते हैं कि एक चर का रैखिक समीकरण क्या होता है

S: ऐसा समीकरण जिसमें केवल एक चर होता है और प्रत्येक अचरेतर पद की घात 1 होती है।

T: बहुत अच्छा! निम्नलिखित समस्या पर ध्यान दीजिए:

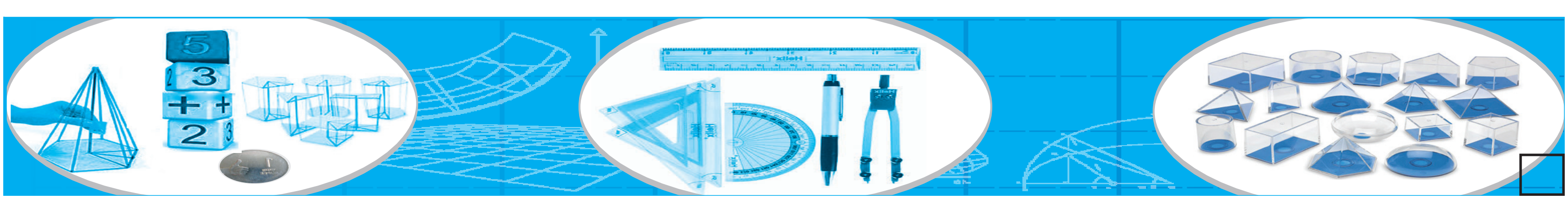
राम और रहीम दोनों के पास कुल 25 पुस्तकें हैं। रहीम के पास राम की तुलना में 5 पुस्तकें अधिक हैं। राम और रहीम के पास व्यक्तिगत रूप से पुस्तकों की संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

S: मान लीजिए राम की पुस्तकों की संख्या x है।

तो रहीम की पुस्तकों की संख्या $= x + 5$

राम और रहीम दोनों के पास कुल 25 पुस्तकें हैं।

इसलिए, $x + (x + 5) = 25$



अर्थात्, $2x + 5 = 25$

अर्थात्, $2x = 25 - 5 = 20$

इसलिए, $x = 10$ और $x + 5 = 15$ है।

अत:, राम के पास 10 पुस्तकें और रहीम के पास 15 पुस्तकें हैं।

T: अच्छा ! आइए एक दूसरी समस्या पर विचार करते हैं। गीता कुछ प्रसाधन वस्तुएँ खरीदने के लिए एक दुकान पर गई। उसे दुकान पर दो प्रकार के संयुक्त प्रस्ताव (combo offer) मिले। दो बाल्टियों और 3 मगों के एक संयुक्त पैक का मूल्य ₹ 225 था और 3 बाल्टियों एवं 2 मगों के दूसरे संयुक्त पैक का मूल्य ₹ 315 था। क्या आप प्रत्येक बाल्टी और प्रत्येक मग का मूल्य ज्ञात कर सकते हैं?

आपसे यहाँ क्या ज्ञात करने के लिए कहा गया है?

S: एक बाल्टी का मूल्य और एक मग का मूल्य

T: आप इन्हें नहीं जानते हैं। इस प्रकार, अज्ञात क्या हैं?

S: एक बाल्टी का मूल्य एवं एक मग का मूल्य अज्ञात हैं।

T: इन दो अज्ञातों को संकतों से निरूपित कीजिए।

S: मान लीजिए एक बाल्टी का मूल्य ₹ x और एक मग का मूल्य ₹ y है

T: समस्या में क्या दिया हुआ है?

S: 2 बाल्टियों और 3 मगों का मूल्य ₹ 225 है।

3 बाल्टियों और 2 मगों का मूल्य ₹ 315 है।

T: यदि एक बाल्टी का मूल्य ₹ x और एक मग का मूल्य ₹ y है, तो 2 बाल्टियों और 3 मगों का मूल्य क्या होगा?

S: ₹ $2x$ + ₹ $3x$ = ₹ $(2x + 3y)$।

T: अच्छा। 3 बाल्टियों और 2 मगों का कुल मूल्य क्या होगा?

S: ₹ $(3x + 2y)$

T: जो कुछ समस्या में दिया हुआ है उसे समीकरण के रूप में लिखिए।

S: $2x + 3y = 225$ और

$3x + 2y = 315$

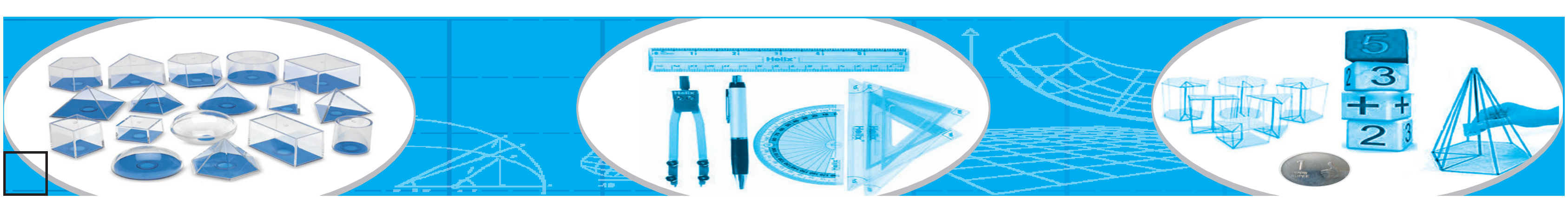
T: प्रत्येक समीकरण में कितने चर हैं?

S: प्रत्येक समीकरण में दो चर हैं।

T: उपरोक्त समीकरणों में प्रत्येक अचरेतर पद की घात क्या है ?

S: प्रत्येक अचरेतर पद की घात 1 है।

T: इस प्रकार के समीकरण दो चरों के रैखिक समीकरण कहलाते हैं। $2u - v = 0$, $x + 3z - 5 = 6$, $3r - t = 2$, दो चरों के रैखिक समीकरणों के कुछ उदाहरण हैं। कुछ अन्य उदाहरण दीजिए।



S: $x + 2y = 3$

$u - 3v = 4$

$3t - 5u = 8$

T: क्या $3u = 2v + 5$ दो चरों का रैखिक समीकरण है ?

S: हाँ

T: बहुत अच्छा!

क्या $x - y + \mathbf{z} = 8$ दो चरों का रैखिक समीकरण है ?

S: नहीं।

T: क्या $u - 2v^2 = -2$ दो चरों का रैखिक समीकरण है ?

S: नहीं।

T: क्यों ?

S: दिए हुए समीकरण में दो चर u और v हैं। परन्तु पद $-2v^2$ की घात 2 है। इसलिए यह रैखिक समीकरण नहीं है।

T: बहुत अच्छा! निम्नलिखित समीकरणों में पहचान कीजिए कि कौन सा समीकरण रैखिक समीकरण है और कौन सा नहीं है। कारण भी बताइए।

1. $x - 2z = 3$
2. $2r - 5s = 0$
3. $2\mathrm{x} - 3t = 5t + 1$
4. $r - s + 2u = 7$
5. $z + 5 = 3z$
6. $2u + 3v - z = 0$
7. $2x + y + t + 3 = 5$
8. $2x + 3t = 2t + 3$
9. $u - 2x^2 = 3$
10. $2u^3 - 4v = 1$
11. $u^2 - t^2 = 4t$
12. $x - y = x + 3y + 4$

सहयोगात्मक अधिगम विधि के अंतर्गत यह कार्य समूहों में किया जा सकता है।

T: हम पहले एक समस्या की चर्चा कर चुकें हैं जिसमें गीता बाल्टी और मग खरीदने के लिए एक दुकान पर जाती है। आइए एक और समस्या पर विचार करते हैं।

कक्षा IX में प्रत्येक विद्यार्थी के पास 4 पुस्तकें और 6 कापियाँ हैं तथा कक्षा III में प्रत्येक विद्यार्थी के पास 2 पुस्तकें और 2 कापियाँ हैं।

कक्षा IX और कक्षा III में कुल मिलाकर 100 पुस्तकें और 140 कापियाँ हैं। इस सूचना को समीकरणों के रूप में कैसे निरूपित करेंगे?

T: क्या आप कक्षा IX और III में विद्यार्थियों की संख्याएँ जानते हैं?

S: नहीं।

T: तो अज्ञात क्या हैं?

S: कक्षा IX के विद्यार्थियों की संख्या एक अज्ञात है और कक्षा III के विद्यार्थियों की संख्या दूसरा अज्ञात है।

T: इस अज्ञातों को संकेतों से निरूपित कीजिए और बताइए कि कक्षा IX में कुल कितनी पुस्तकें हैं और कक्षा III में कुल कितनी पुस्तकें हैं।

S: मान लीजिए कि कक्षा IX में विद्यार्थियों की संख्या x है और कक्षा III में विद्यार्थियों की संख्या y है। कक्षा IX में प्रत्येक विद्यार्थी के पास 4 पुस्तकें हैं। इसलिए कक्षा IX में पुस्तकों की कुल संख्या $4x$ है।

T: बहुत अच्छा ! कोई अन्य विद्यार्थी बताए कि कक्षा III में कुल कितनी पुस्तकें हैं।

S: कक्षा III में प्रत्येक विद्यार्थी के पास 2 पुस्तकें हैं और कक्षा III में विद्यार्थियों की संख्या y है।

इसलिए, कक्षा III में पुस्तकों की कुल संख्या $2y$ है।

T: इस प्रकार, कक्षा IX और कक्षा III में कुल कितनी पुस्तकें हैं?

S: $4x + 2y$

T: परन्तु समस्या में कक्षा IX एवं कक्षा III की कुल पुस्तकों के बारे में क्या सूचना दी हुई है और क्या हम इस सूचना को समीकरण के रूप में लिख सकते हैं?

S: पुस्तकों की कुल संख्या 100 है। इसलिए, $4x + 2y = 100$ है।

T: इसी प्रकार, कक्षा IX और कक्षा III की कापियों को कुल मिलाकर दर्शाइए।

S: कक्षा IX में कापियों की संख्या $6x$ है।

कक्षा III में कापियों की संख्या $2y$ है।

इस प्रकार, कक्षा IX में विद्यार्थियों की संख्या x और कक्षा III में विद्यार्थियों की संख्या y, दो चरों के निम्नलिखित रैखिक समीकरणों को संतुष्ट करती हैं:

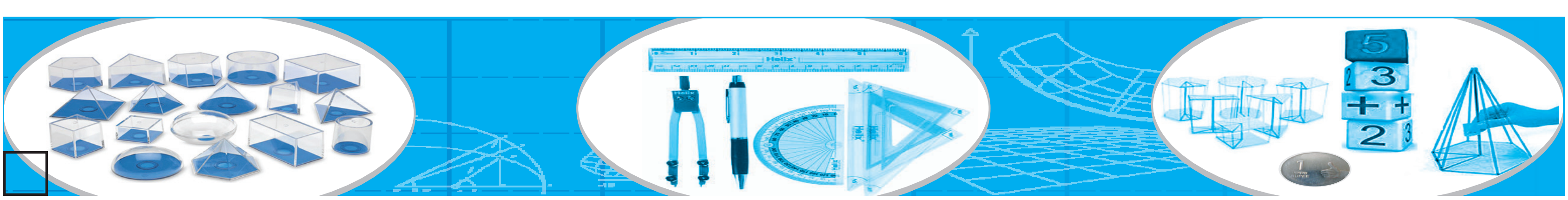
$4x + 2y = 100$

$6x + 2y = 140$

पुनरावलोकन प्रश्न:

निम्नलिखित समस्याओं के लिए दो चरों के रैखिक समीकरण लिखिए:

1. प्रभा के पास कुछ ₹ 5 के और कुछ ₹10 के नोट हैं। ₹ 5 के नोटों की संख्या ₹10 के नोटों की संख्या से एक अधिक है और उसके पास कुल ₹ 125 की राशि है।
2. किसी कक्षा में लड़कियों की संख्या का दुगुना, लड़कों की संख्या के तीन गुने से 5 अधिक है। कक्षा में विद्यार्थियों की कुल संख्या 72 है।



शिक्षकों के लिए कार्य :
विलोपन विधि से दो युगपत रैखिक समीकरणों के हल के अधिगम के लिए विद्यार्थी-शिक्षक वार्तालाप लिखिए।

2.5 भ्रान्तियाँ

1. $x = 2$ के लिए, $5x^4$ का मान 5×2^4 लिखने के स्थान पर 52^4 लिखा जाता है।
2. शून्य (0) को एक बहुपद का शून्यक समझा जाता है, जबकि शून्यक कोई भी वास्तविक संख्या हो सकती है।
3. कभी – कभी, किसी पद का गुणांक उस पद की घात समझ ली जाती है।
4. किसी पद का ऋणातमक चिह्न उस पद के संख्यात्मक गुणांक में सम्मिलित नहीं किया जाता है। उदाहरणार्थ बहुपद $43x^3 - 3x^2 + 1$ में,पद $-3x^2$ का गुणांक -3 के स्थान पर 3 लिया जाता है और $-3x^2$ के स्थान पर $3x^2$ को पद मान लिया जाता है।
5. शून्यक और मूल का एक ही अर्थ समझ लिया जाता है, जबकि बहुपद के लिए शून्यक और बहुपद समीकरण के लिए मूल की बात की जाती है।
6. $(x-4)(x-2) = 4$ का अर्थ है $x - 4 = 4$, $x - 2 = 4$, जैसा कि $(x-4)(x-2) = 0$ की स्थिति में $x - 4 = 0$, $x - 2 = 0$ होता है।
7. $x^2 = -4$ को हल करने के लिए, कुछ विद्यार्थी $x = \sqrt{(-2)}$ ज्ञात करते हैं।
8. कभी - कभी विद्यार्थी शेषफल प्रमेय के लिए गुणनखंड प्रमेय को लिखते हैं और विलोमत: भी ऐसा करते हैं।

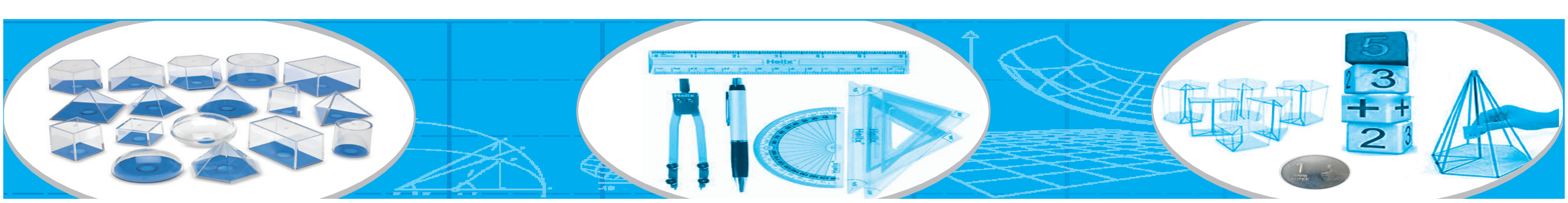
3

ज्यामिति का शिक्षण

3.1 भूमिका

ऐसा विश्वास किया जाता है कि शब्द 'ज्यामिति' की उत्पत्ति दो यूनानी शब्दों 'जियो' जिसका अर्थ 'भूमि' तथा 'मीट्रोन' जिसका अर्थ है 'मापना' से हुई है। इस प्रकार, ज्यामिति का प्रारंभ उस समय काल से माना जा सकता है जब मानव को प्रथम बार भूमि को मापने की आवश्यकता हुई। प्राचीन मिस्रवासी शायद पहले लोग थे जिन्होंने नील नदी की वार्षिक बाढ़ के बाद अपने भूमि चिन्हों को पुन:स्थाापित करने की प्रक्रिया में ज्यामिति का अध्ययन किया। उनका मुख्यत: ध्यान आयत, वर्ग, इत्यादि जैसी आकृतियों के परिमापों और क्षेत्रफलों को ज्ञात करने पर रहता था। प्राचीन बेबीलोनवासियों ने भी ज्यामिति का उपयोग सरल रेखीय आकृतियों के क्षेत्रफलों को ज्ञात करने में किया तथा इन आकृतियों के क्षेत्रफलों के लिए अनेक सूत्र विकसित किए। ये सूत्र प्राचीन बेबीलोनवासियों के गणितीय पाठ्य ग्रंथ रींड पैपिरस (1650BC) में उपलब्ध हैं। मिस्रवासियों और बेबीलोनवासियों दोनों ने ज्यामिति का उपयोग भूमि मापने और भवन निर्मित करने जैसे व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए किया। प्राचीन भारतीयों ने भी ज्यामिति का उपयोग केवल व्यावहारिक उददे्श्यों जैसे धार्मिक अनुष्ठानों को करने के लिए विभिन्न प्रकार की वेदियों के निर्माण तथा साथ ही खगोलिकी और ज्योतिष में किया। वेदियों के निर्माण के आवश्यक मापन एक 'रस्सी' की सहायता से किए जाते थे जिसे '**सुल्ब**' कहा जाता था। वैदिक ऋषियों के ज्यामितीय ज्ञान की यह सूचना '800BC' से 500BC के समय काल में निर्मित प्राचीन ग्रंथों में निहित थी, जिन्हें '**सुल्बसूत्र**' कहा जाता था। सबसे पुराने ज्ञात सुल्बसूत्र, जिसे बोधायन सुल्बसूत्र कहा जाता है (लगभग 800BC) में तथाकथित पाइथागोरस प्रमेय का कथन स्पष्ट रूप से "एक आयत के विकर्ण द्वारा स्वयं रचित क्षेत्रफल उसकी दोनों भुजाओं द्वारा पृथक रूप से निर्मित दोनों (क्षेत्रफलों) के बराबर होता है" के रूप में दिया हुआ है। इस प्रकार, अधिकांश प्राचीन सभ्यताओं ने ज्यामिति का उपयोग केवल व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए किया तथा उसे एक क्रमबद्ध अध्ययन बनाने की दिशा में बहुत कम कार्य किया गया।

ज्यामिति को एक क्रमबद्ध बिवेचना देने का श्रेय यूनानियों को दिया जाता है। इस संबंध में 'थेल्स' का नाम विशेष रूप से लिया जा सकता है, क्योंकि उन्हीं के कारण ज्यामिति का ज्ञान मिस्र से यूनान पहुँचा। थेल्स का सबसे प्रसिद्ध शिष्य, पाइथागोरस था (580BC-500BC)। यूनानी गणितज्ञों में, सबसे अधिक नाम यूक्लिड का लिया जाता है (जिनका जीवन काल 300BC के आस पास था)। उन्होंने सोचने (या चिंतन करने) की एक नई प्रक्रिया प्रारंभ की, जिसे तार्किक विवेचन कहा जाता है, तथा बिंदु, रेखाओं, इत्यादि तथा कुछ अभिगृहीतों और अभिधारणों पर आधारित आयतों, त्रिभुजों, इत्याादि कुछ आकृतियों के बारे में निष्कर्षों तक पहुँचने का मार्ग प्रदर्शित किया।



3.2 व्यापक युक्तियाँ

इस विषय की ओर अग्रसर होने की दो विधियाँ हैं- एक है तार्किक विधि तथा दूसरी है मनोवैज्ञानिक विधि। पहली विधि में, अधिगम में तार्किक चरणों के एक अनुक्रम के माध्यम से तथ्यों के क्रमबद्ध निगमन संबद्ध होते हैं, जबकि दूसरी विधि में, अधिगम शिक्षार्थी की आवश्यकता, उत्सुकता तथा रुचि पर आधारित होता है। इसीलिए, दूसरी विधि के लिए, यह सुझाव दिया जाता है कि ज्यामिति ठोसों से प्रारंभ होनी चाहिए तथा धीरे-धीरे पृष्ठों (तलों), रेखाओं और बिंदुओं पर आनी चाहिए तथा केवल उसके बाद अमूर्त संकल्पनाओं (अवधारणाओं) पर आनी चाहिए। आपने शायद यह देखा होगा कि यह विधि प्राथमिक विद्यालयी स्तर तक अपनाई जाती है। ज्यामिति शिक्षण की पहली विधि माध्यमिक स्तर पर अपनाई जाती है, जिसे हम वर्तमान रूप से विचार कर रहे हैं। शायद आप में से कुछ के लिए, इस पर ध्यान देना रोचक होगा कि उच्च प्राथमिक स्तर पर, ज्यामिति के शिक्षण के लिए एक बीच वाली विधि अपनाई जाती है, जैसे अर्ध-तार्किक विधि या प्रायोगिक विधि कहा जा सकता है। दूसरे शब्दों में, इस विषय का एक क्रमबद्ध अध्ययन अनौपचारिक रूप में उच्च प्राथमिक स्तर से पहले ही प्रारंभ हो चुका है तथा इसे माध्यमिक स्तर पर संघटित किया गया है। इस क्रमबद्ध अध्ययन के आवश्यक घटक इस प्रकार हैं:

(a) अपरिभाषित पद

(b) परिभाषाएँ या परिभाषित पद

(c) अभिगृहीत या अभिधारणाएँ

(d) प्रमेय

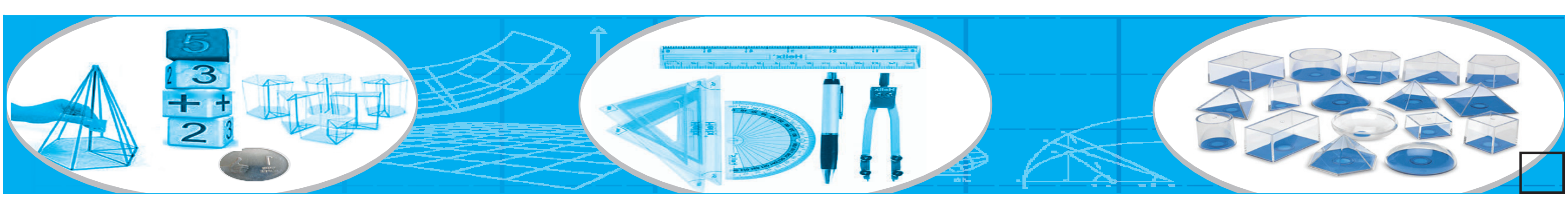
(e) प्रश्न और रचनाएँ

उपरोक्त के अतिरिक्त ज्यामिति के शिक्षण में निम्नलिखित युक्तियाँ भी सहायक होती हैं:

1. आगमन–निगमन विधियाँ
2. उदाहरणों के माध्यम से स्पष्ट करना
3. 'क्यों' और 'कैसे' वाले प्रश्न पूछना / उत्तरों के लिए कारणों को मांगना
4. समस्याएँ हल करने के लिए वैकल्पिक विधियों को विकसित करना

3.3 मुख्य संकल्पनाएँ

- आधारभूत ज्यामितीय संकल्पनाएँ
- कोणों के युग्म
- तिर्यक रेखाएँ और समांतर रेखाएँ
- एक बहुभुज का कोण योग गुण
- आकृतियों की सर्वांगसमता- त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए विभिन्न कसौटियाँ
- समद्विबाहु त्रिभुजों के गुण
- एक त्रिभुज में असमिकाएँ
- आकृतियों की समरूपता- त्रिभुजों की समरूपता के लिए विभिन्न कसौटियाँ
- पाइथागोरस प्रमेय
- विशिष्ट चतुर्भुज और उनके गुण



- वृत्त और उनके गुण
- रचनाएँ

3.4 शिक्षण युक्तियाँ

अब हम नीचे लिखी कुछ मुख्य संकल्पनाओं की किसी कक्षा की स्थितियों में शिक्षण-अधिगम के लिए चर्चा करेंगे:

(i) आधारभूत ज्यामितीय संकल्पनाओं	(ii) आकृतियों की सर्वांगसमता
(iii) एक त्रिभुज में असमिकाएँ	(iv) आकृतियों की समरूपता
(v) पाइथागोरस प्रमेय	(vi) वृत्त

(i) आधारभूत ज्यामितीय संकल्पनाएँ

बिंदु, रेखा और तल ज्यामिति के निर्माणात्मक खंड हैं। शिक्षक इन धारणाओं को कुछ भौतिक उदाहरणों तथा अनुभवों द्वारा स्पष्ट कर सकता है, जैसा कि पाठ्यपुस्तकों में दिया गया है। यह विद्यार्थियों को स्पष्ट किया जा सकता है कि प्रत्येक पद को परिभाषित नहीं किया जा सकता है तथा इसी कारण **बिंदु**, **रेखा** और **तल** को **अपरिभाषित पद** माना जाता है।

क्रियाकलाप:

कक्षा के प्रत्येक विद्यार्थी से यह कहा जाए कि वह अपनी अभ्यास पुस्तिका पर इनमें से किसी एक पद, मान लीजिए 'रेखा', की संभव परिभाषा लिखें। इनमें से प्रत्येक परिभाषा में यह देखा जाएगा कि ऐसे अनेक 'शब्द' हैं जो एक रेखा को परिभाषित करने में प्रयुक्त हुए हैं, जिन्हें स्वयं पहले परिभाषित करने की आवश्यकता है। अब आप संबद्ध विद्यार्थी से कह सकते हो कि अपने द्वारा प्रयोग किए गए इन शब्दों को परिभाषित करें। उसके उत्तरों को प्राप्त करने पर, यह देखा जाएगा कि इन शब्दों को परिभाषित करने के लिए, कुछ और 'नए शब्द ' प्रयोग किए गए हैं, जिन्हें पुन: स्वयं परिभाषित करने की आवश्यकता है। इस प्रकार, यह प्रक्रिया हो सकता है कि कभी समाप्त नहीं हो तथा इसलिए रेखा को एक अपरिभाषित शब्द लेने की आवश्यकता है। यही प्रक्रिया बिंदु और तल को अपरिभाषित पद लेने की आवश्यकता को स्पष्ट करने के लिए अपनाई जा सकती है।

विद्यार्थियों को इस तथ्य से भी अवगत होना चाहिए कि:

(a) एक तल में, दिए हुए दो बिंदुओं से होकर एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है। यह रेखा पूर्णत: तल में स्थित होती है।

(b) एक तल में स्थित दो रेखाओं में एक से अधिक उभयनिष्ठ बिंदु नहीं हो सकते।

(c) एक रेखा और एक बिंदु, जो इस रेखा पर स्थित नहीं है, इस बिंदु से होकर दी हुई रेखा के समांतर एक और केवल एक ही रेखा खींची जा सकती है (जिसे प्लेफेयर अभिगृहीत कहा जाता है), इत्यादि।

यहाँ, इस पर बल दिया जा सकता है कि जैसे प्रत्येक पद को परिभाषित नहीं किया जा सकता है, उसी प्रकार उपरोक्त प्रकार के प्रत्येक संबंध को तार्किक रूप से स्थापित नहीं किया जा सकता, यद्यपि ये सभी स्वयं सिद्ध सत्य प्रतीत होते हैं। ऐसे संबंधों (कथनों) को बिना किसी तार्किक विवेचना के सत्य स्वीकार्य कर लिया जाता है तथा इन्हे अभिगृहीत या अभिधारणाएँ कहा जाता है। उदाहरण के लिए, उपरोक्त तीन कथनों (a), (b) और (c) में कथन (a) और (c) सत्य प्रतीत होते हैं, परंतु इन्हें तार्किक रूप से स्थापित करना संभव नहीं है। इसलिए इन्हें स्वयं सिद्ध सत्य स्वीकार्य किया जाता है तथा **अभिगृहीत** कहा जाता है। जहाँ तक कथन (b) का संबंध है, इसकी सत्यता को तार्किक रूप से स्थापति किया जा सकता है। ऐसे कथनों को प्राय: **प्रमेय** कहा जाता है। इनको अन्य अभिगृहीतों या अभिधारणाओं के साथ अन्य कथनों की सत्यता को स्थापति करने के लिए सीधा प्रयोग किया जा सकता है। किसी कथन की सत्यता को तार्किक विधि से स्थापित करने की प्रक्रिया उस कथन की **उपपत्ति**

कहलाती है। ज्यामिति के इन घटकों की चर्चा “आधारभूत ज्यामितीय संकल्पनाओं” के इस अनुच्छेद में इसलिए की गई है, क्योंकि ये ज्यामिति के सभी विषयों में निंरतर व्याप्त रहेंगे। अत: यह सभी विद्यार्थियों के लिए महत्वपूर्ण है कि वे इन घटकों से भली भांति अवगत हो जाएँ। विद्यार्थियों को इस तथ्य से भी अवगत होना चाहिए कि यद्यपि हम ‘यूक्लिडीय ज्यामिति’ नामक ज्यामिति का अध्ययन कर रहें हैं, परन्तु हमारे द्वारा प्रयोग किए गए अभिगृहीत या अभिधारणाएँ यूक्लिड द्वारा प्रयोग किए अभिगृहीतों या अभिधारणाओं से थोड़ा भिन्न हैं। उदाहरणार्थ, इन दिनों शब्दों अभिगृहीतों और अभिधारणाओं को एक दूसरे के लिए प्रयोग करते हैं, जबकि यूक्लिड ने ज्यामिति में आए स्वयं सिद्ध सत्यों (तथ्यों) के लिए अभिधारणाओं यूक्लिड ने स्वयं अपनी ही प्रकार से बिंदु, रेखा और तल (पृष्ठ) को परिभाषित किया, जैसा कि एन.सी.ई आर.टी. की कक्षा IX की गणित पाठ्यपुस्तक में पहले ही दिया गया है। शिक्षक विद्यार्थियों के सम्मुख इस पर भी बल दे सकते हैं कि “यूक्लिड” की ऐतिहासिक पाँचवी अभिधारणा ने वर्तमान में ‘प्लेफेयर अभिगृहीत’ का रूप ले लिया है।

पुनरावलोकन

1. चर्चा कीजिए कि वर्तमान में ज्यामिति का अध्ययन यूक्लिड द्वारा अपनाई गई विधि से किस प्रकार भिन्न है।
2. आप ज्यामिति में एक कथन को सिद्ध करने से क्या समझते हैं?

(ii) आकृतियों की सर्वांगसमता

विद्यार्थियों को सदैव वस्तुओं की तुलना करने की आदत होती है। विद्यार्थियों की इस स्वाभाविक प्रवृत्ति का प्रयोग शिक्षक उनमें क्रमबद्ध तुलना की आदत विकसित करने में कर सकता है, जिससे अंतत: **सर्वांगसमता** की संकल्पना अवधारणा, पर पहुँचा जा सके। इस अवधारणा का परिचय विद्यार्थियों को समान आकार और समान माप की वस्तुएं, जैसे एक ही ब्रांड के **ब्लेड**, एक ही ट्रेड मार्क के बिस्कुट इत्यादि दिखाकर कराया जा सकता है। उनसे कहा जा सकता है वे ऐसी ही कुछ और वस्तुओं के बारे में सोचे, जैसे किसी फैक्ट्री में समान विवरण से बनाए गए दो खिलौने, समान माप के बनाए गए विश्व के मान चित्र इत्यादि। ऐसी वस्तुओं के माध्यम से, यह बल दिया जाना चाहिए कि **समान आकार और समान माप की दो आकृतियाँ सर्वांगसम आकृतियां कहलाती है।**

आकृतियों की सर्वांगसमता की स्थिति में निम्नलिखित दो बिंदुओं पर बल दिए जाने की आवश्यकता है:

(i) आकृतियों की सर्वांगसमता त्रिविमीय आकृतियों में भी विद्यमान होती है।

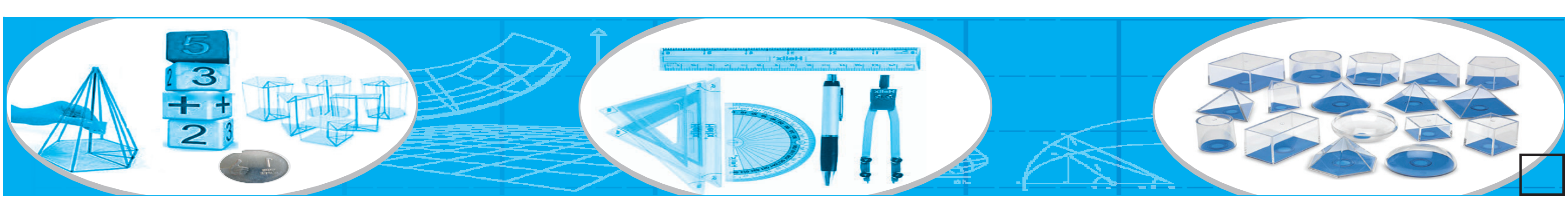
(ii) दो समतल आकृतियों में, यदि एक आकृति को दूसरी आकृति पर इस प्रकार रखा जा सके कि प्रत्येक एक दूसरे को पूर्णत: ढक ले, तो वे परस्पर सर्वांगसम कहलाती हैं।

शिक्षक द्वारा विद्यार्थियों को यह विश्वस्त कराना चाहिए कि सर्वांगसम वर्ग, सर्वांगसम आयत, सर्वांगसम वृत्त, सर्वांगसम समचतर्भुज, सर्वांगसम समांतर चतुर्भुज, इत्यादि भी हो सकते हैं।

उन्हें यह भी समझना चाहिए कि त्रिभुजों की सर्वांगसमता की विभिन्न कसौटियाँ उनकी रचनाओं से स्वाभाविक रूप से जुड़ी होती हैं। शिक्षक इस पर भी बल दे सकता है कि त्रिभुजों की सर्वांगसमता और उसकी विभिन्न कसौटियाँ का शिक्षण अन्य ज्यामितीय आकृतियों जैसे समांतर चतुर्भुज, आयत, वृत्त, इत्यादि के अध्ययन में बहुत उपयोगी है। यह अच्छा होगा, यदि इन सब बातों की कक्षा में चर्चा संवाद विधि में हो, जैसा कि नीचे दिया गया है :

शिक्षक (T): आप पिछली कक्षाओं में, दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के बारे में पहले ही सीख चुके हैं। क्या आप बता सकते हैं कि दो त्रिभुज कब सर्वांगसम होंगे?

विद्यार्थी(S_1): यदि एक त्रिभुज की सभी भुजाएँ तथा सभी कोण क्रमश: दूसरे त्रिभुज की सभी भुजाओं और सभी कोणों के बराबर हों।



T: इसका अर्थ है कि एक त्रिभुज के सभी छः अवयव दूसरे त्रिभुज के सभी छः अवयवों के बराबर हैं।

S_1: हाँ, मैडम!

T: क्या आपको याद है कि सांकेतिक रूप में दो सर्वांगसम त्रिभुज किस प्रकार लिखे जाते हैं ?

S_2: हाँ, मैडम!

T: मान लीजिए कि दो त्रिभुजों ABC और PQR में $AB = PQ, BC = QR,\ CA = RP,$ $\angle A = \angle P, \angle B = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ है। आप इन दोनों त्रिभुजों की सर्वांगसमता को सांकेतिक रूप से किस प्रकार लिखेंगे ?

S_2: $\Delta ABC \cong \Delta PQR$

T_3: ठीक है। क्या हम इसे $\Delta BCA \cong \Delta QRP$ लिख सकते हैं ?

S_2: नहीं।

T: क्या S_2 का उत्तर सही है ?

S_3: नहीं, हम इसे $\Delta BCA \cong \Delta QRP$ लिख सकते हैं।

T: कैसे?

S_3: जब $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, तब $A \leftrightarrow P, B \leftrightarrow Q$ और $C \leftrightarrow R$ है। इस संगतता के साथ, $\Delta BCA \cong \Delta RQP$ लिखना पूर्णतया सही है।

T: क्या $\Delta BCA \cong \Delta RQP$ इसे लिखना सही है ?

S_3: नहीं।

T: क्यों?

S_3: क्योंकि इससे संगतता $B \leftrightarrow R, C \leftrightarrow Q$ और $A \leftrightarrow P$ प्राप्त होगी।

T: इससे क्या होता है ?

S_3: इस संगतता से, $\angle B = \angle R$, $\angle C = \angle Q, \angle A = \angle P, BC = RQ, AB = PR$ और $CA = QP$ है। संगत भागों की यह समानता वैसी नहीं है जो ऊपर दोनों त्रिभुजों के संगत भागों की समानता दी है।

T: इसका अर्थ है कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता सांकेतिक रूप में सदैव शीर्षों की सही संगतता के साथ लिखी जानी चाहिए।

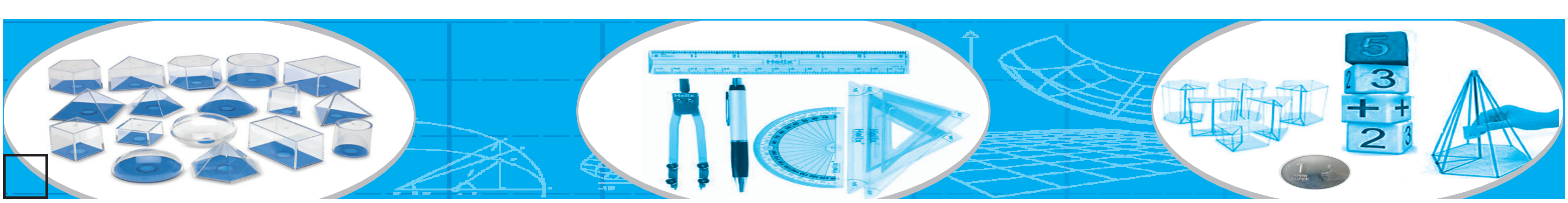
S: हाँ, मैडम।

T: आपने अभी देखा है कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए, एक त्रिभुज के सभी छः अवयव दूसरे त्रिभुज के सभी छः संगत अवयवों के बराबर होने चाहिए।

S: हाँ, मैडम।

T: तब त्रिभुजों की सर्वांगसमता स्थापित करने के लिए, क्या हमें दोनों त्रिभुजों के सभी छः भागों की समता की सदैव जाँच करनी चाहिए? क्या हम ऐसा दोनों त्रिभुजों के केवल कुछ ही अवयव लेकर नहीं कर सकते हैं ?

S_2: नहीं, हमें ऐसा करने की आवश्यकता नहीं है। हम ऐसा दोनों त्रिभुजों के केवल **तीन अवयवों** की समानता से ही कर सकते हैं।



T: बहुत अच्छा! आपने इनके बारे में अपनी पिछली कक्षाओं में पढ़ा है। क्या आपको इस उद्देश्य के लिए प्रयोग किए गए परिणामों के नाम याद हैं?

S: ये दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए SSS, SAS, ASA और RHS कसौटियाँ कहलाती हैं।

T: ये कसौटियाँ किस प्रकार प्राप्त की गई थीं ?

S: क्रियाकलापों और प्रयोगों द्वारा।

T: क्या हमें क्रियाकलापों से प्राप्त परिणामों पर सदैव निर्भर रहना चाहिए?

S: नहीं

T: तब, हमें क्या करना चाहिए?

S: हमें प्रयास करना चाहिए कि हम इन्हें तार्किक विवेचन द्वारा प्राप्त कर सकें। ऐसा कुछ कक्षा IX की गणित पाठ्यपुस्तक में पहले से ही किया जा चुका है।

S_1: हाँ, पुस्तक में इसकी चर्चा **SAS कसौटी** से प्रारंभ हुई है। इस कसौटी को एक क्रियाकलाप द्वारा स्थापित किया गया है तथा एक अभिगृहीत (या अभिधारणा), जिसे **SAS अभिगृहीत** कहा जाता है, के रूप में स्वीकार्य किया गया है।

S_2: क्या हम इसे सिद्ध नहीं कर सकते?

T: नहीं। क्योंकि, प्रत्येक परिणाम को सिद्ध करना संभव नहीं है।

S: क्या हम अन्य तीनों कसौटियों (नियमों) को भी अभिगृहीतों के रूप में मान सकते हैं?

T: हाँ, हम ऐसा कर सकते हैं। परंतु यह कहा जाता है कि किसी भी पद्धति में अभिगृहीतों की संख्या न्यूनतम रखनी चाहिए।

S_1: तब, क्या करना चाहिए?

S_2: हमें प्रयास करना चाहिए कि हम इन्हें तार्किक विवेचन द्वारा प्राप्त कर सकें। ऐसा कुछ कक्षा IX की गणित पाठ्यपुस्तक में पहले से ही किया जा चुका है।

T: अन्य तीन कसौटियों ASA, SSS और RHS को सिद्ध किया जाता है। अपनी कक्षा IX की पाठ्यपुस्तक को देखिए।

S_1: ठीक है मैडम, परंतु मुझे पाठ्यपुस्तक में दिए कसौटियों के अनुक्रम के बारे में कुछ व्याकुलता है।

T: समस्या क्या है?

S_1: यह अनुक्रम पिछली कक्षाओं में दिए अनुक्रम से विल्कुल भिन्न है।

S_2: हाँ, मैडम।

T: दोनों अनुक्रमों में क्या अन्तर है?

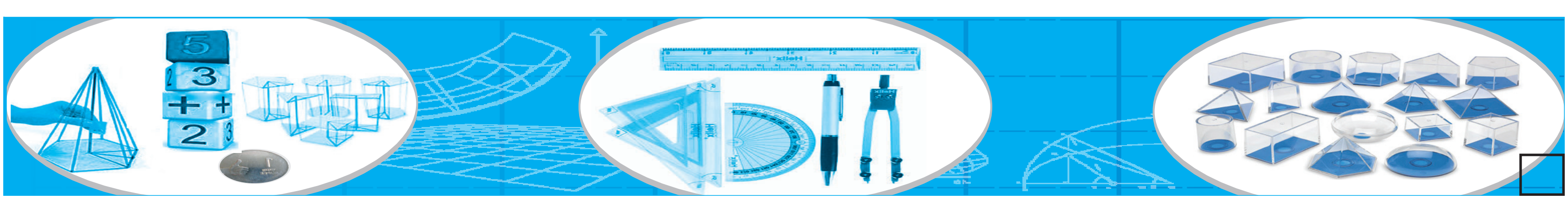
S_3: कक्षा VII में, यह क्रम इस प्रकार था:

SSS, SAS, ASA, RHS कसौटियाँ तथा इसके बाद समद्विबाहु त्रिभुजों के गुण। कक्षा IX में, यह इस प्रकार है:

SAS और ASA कसौटियाँ, समद्विबाहु त्रिभुजों के गुण, SSS और RHS कसौटियाँ

T: हाँ, आप सही कह रहे हैं।

S_4: कक्षा IX, में अनुक्रम बदलने की क्या आवश्यकता है?



T: क्योंकि कक्षा IX में, हम ज्यामिति का अध्ययन एक क्रमबद्ध विधि से कर रहे हैं।

S_1: इसका क्या अर्थ है?

T: यहाँ हम अपरिभाषित पदों, अभिगृहीतों (अभिधारणाओं) से प्रारंभ कर रहे हैं तथा तार्किक विवेचना की प्रक्रिया का प्रयोग करते हुए नए परिणामों पर पहुँच (को सिद्ध कर) रहे हैं। इस तार्किक विवेचन में, हम पूर्व ज्ञात अभिगृहीतों और प्रमेयों (परिणामों) की सहायता लेते हैं, जिन्हें पहले ही सिद्ध किए गए परिणाम से स्वतंत्र रूप से सिद्ध किया जा चुका है।

S_1: मैं अभी भी स्पष्ट नहीं हूँ। कृपया इसे थोड़ा और स्पष्ट कीजिए।

T: यदि आप ASA, SSS और RHS कसौटियों की औपचारिक उपपत्तियों को देखेंगे, तो आप पाएँगे कि ASA कसौटी को SAS कसौटी के प्रयोग से सिद्ध किया गया है। आगे, SSS और RHS कसौटियों को SAS कसौटी और समद्विबाहु त्रिभुजों के गुणों का प्रयोग करते हुए, सिद्ध किया गया है। इसलिए, SSS और RHS कसौटियों से पहले समद्विबाहु त्रिभुजों के गुणों का शिक्षण आवश्यक है।

S_2: तब, यह कक्षा VII में क्यों नहीं किया गया?

T: वहाँ हम एक क्रमबद्ध या तार्किक विधि नहीं अपना रहे थे। वस्तुत:, उस स्तर पर शिक्षण विधि अर्ध-तार्किक थी।

S_2: हाँ, मैडम। अब, हमें इस बदलाव की आवश्यकता समझ में आ गई है। परंतु क्या हम दो त्रिभुज की सर्वांगसमता के लिए, कुछ और कसौटियाँ नहीं प्राप्त कर सकते?

T: आपने ऐसी एक कसौटी, अर्थात् AAS कसौटी, पाठ्यपुस्तक में अवश्य देखी होगी।

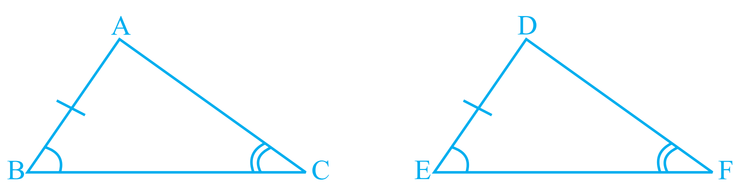
S_3: हाँ मैडम। यह इस प्रकार है:

यदि एक त्रिभुज के दो कोण और एक भुजा दूसरे त्रिभुज के दो कोणों और **संगत भुजा** के बराबर हों, तो दोनों त्रिभुज सर्वांगसम होते हैं।

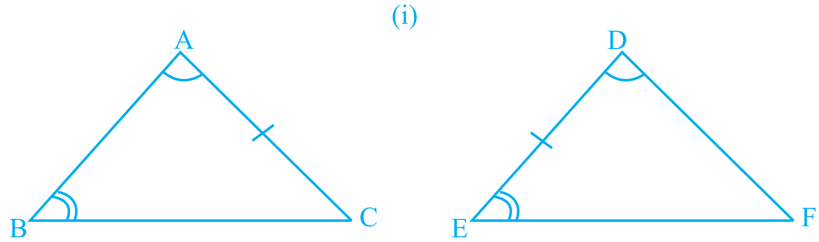
T: बहुत अच्छे। ! क्या आप जानते हैं कि यहाँ शब्द **संगत** अति महत्वपूर्ण है।

S_4: क्यों?

T: नीचे दी गई आकृतियों को देखिए:

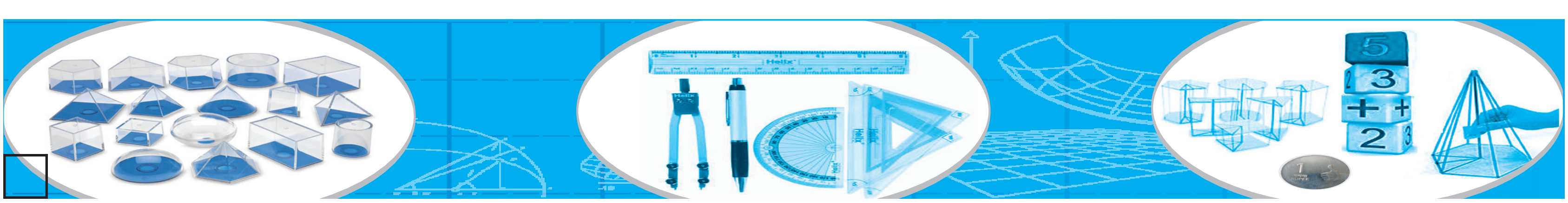


(i)



(ii)

आकृति (i) में, $\angle B = \angle E, \angle C = \angle F$ और $AB = DE$ है। साथ ही, AB और DE संगत भुजाएँ हैं, क्योंकि AB कोण



C के सम्मुख है तथा DE कोण F के सम्मुख है, जो कोण C के बराबर है।

अत:, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ है। (AAS)

परंतु आकृति (ii) में, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ और $AC = DE$ है। परंतु ACऔर DF संगत भुजाएं नहीं हैं। अत:, ΔABC त्रिभुज DEF के सर्वांगसम नहीं है।

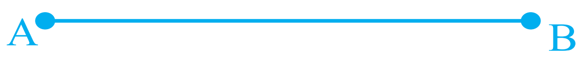
S_1: वास्तव में, मैडम शब्द 'संगत' महत्वपूर्ण है। मेरे मस्तिष्क में एक और शंका है। क्या हम भुजा - भुजा-कोण (SSA) को एक कसौटी ले सकते हैं?

T: नहीं।

S_1: क्यों नहीं?

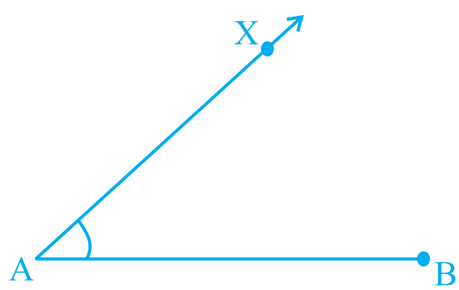
T: हम पहले कह चुके हैं कि त्रिभुज की सर्वांगसमता की विभिन्न कसौटियाँ उनकी रचनाओं से स्वाभाविक रूप से जुड़ी होती हैं। एक त्रिभुज ABC की रचना करने का प्रयास कीजिए, जिसमें दो भुजाएं AB और BC तथा $\angle A$ दिया है।

S_1: सर्वप्रथम, दी हुई लंबाई का रेखाखंड AB खींचिए [आकृति (i)]।



(i)

S_2: अब कोण XAB = दिया हुआ कोण A के बराबर खींचो [आकृति (ii)]।



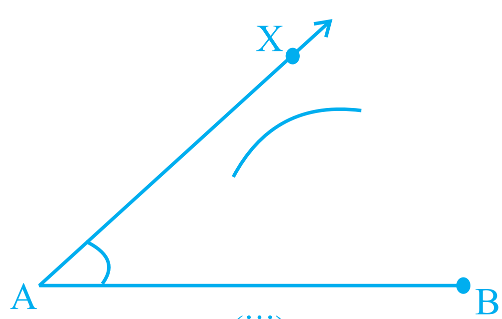
(ii)

S_3: अब B को केन्द्र मान कर और BC त्रिज्या लेकर, बिंदु C प्राप्त करने के लिए एक चाप खींचो।

T: यहाँ तीन संभावनाएँ हैं:

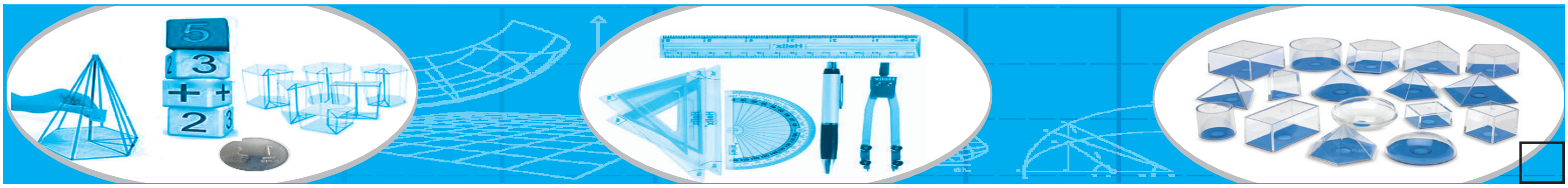
(a) यह चाप $\angle XAB$ की भुजा AX को प्रतिच्छेद नहीं करे [आकृति (iii)] इस स्थिति में, आपको कोई त्रिभुज प्राप्त नहीं होगा।

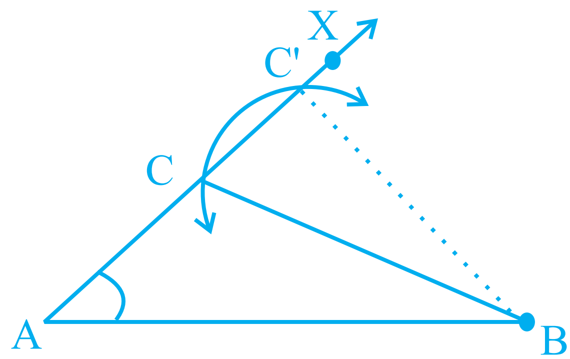
(b) यह चाप भुजा AX को दो बिन्दुओं C और C' पर प्रतिच्छेद करे। इस स्थिति में, दिए हुए मापनों से दो त्रिभुज ABC और ABC' प्राप्त होंगे [आकृति (iv)]।



(iii)

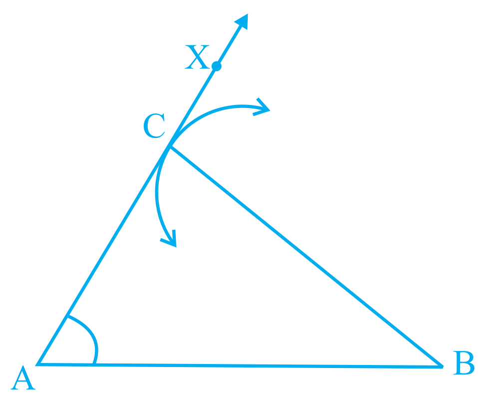
(c) यह चाप भुजा AX को एक ही बिंदु C पर प्रतिच्छेद करें [आकृति (v)]। इस स्थिति में, एक अद्वितीय त्रिभुज ABC प्राप्त होगा। साथ ही, इस त्रिभुज का कोण C समकोण होगा। मैं





(iv)

सोचता हूँ कि आप समझ गए होंगे कि दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के लिए SSA को एक कसौटी क्यों नहीं लिया जा सकता।



(v)

S_4: हाँ, मैडम। परंतु स्थिति (c) में, हम कह सकते हैं कि SSA एक कसौटी है।

T: हाँ, परंतु यह स्थिति RHS कसौटी के अतिरिक्त कुछ नहीं है तथा इसीलिए इसे पृथक रूप से नहीं लिया जा सकता है।

S: धन्यवाद मैडम।

T: ठीक है। कल हम कुछ और रोचक चर्चा करेंगे। अगले दिन, कक्षा का एक दृश्य , शिक्षक कक्षा में प्रवेश करता है।

S: नमस्ते, मैडम।

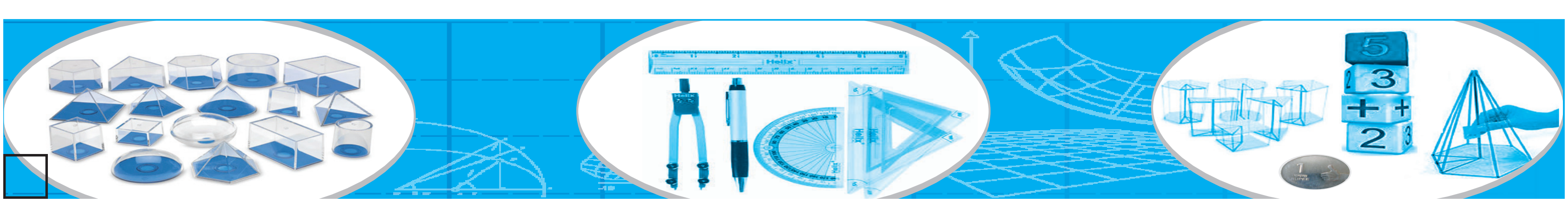
T: नमस्ते, विद्यार्थियों। हम त्रिभुजों की सर्वांगसमता की विभिन्न कसौटियों के बारे में चर्चा कर चुके हैं तथा (SAS, ASA) और (SSS, RHS) कसौटियों के बीच में समद्विबाहु त्रिभुजों के निम्नलिखित दो गुणों को सम्मिलित करने के औचित्य के बारे में भी चर्चा कर चुके हैं:

(i) यदि किसी त्रिभुज की दो भुजाएँ बराबर हों, तो इन भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं तथा

(ii) यदि किसी त्रिभुज के दो कोण बराबर हों, तो इन कोणों की सम्मुख भुजाएं बराबर होती हैं।

हमारा अगला कार्य यह है कि इन कसौटियों और उपरोक्त दोनों गुणों का अन्य ज्यामिति समस्याओं को हल करने में अनुप्रयोग करना।

S: तब किस प्रकार आगे बढ़ें?



T: प्रारंभ में, कसौटियों की एक बेहतर समझ के लिए, आप निम्नलिखित प्रसार की समस्या को हल करने का प्रयास कर सकते हैं:

"त्रिभुजों ABC और DEF में BC=FD और AB=EF है। निम्न का प्रयोग करते हुए, दोनों त्रिभुजों को सर्वांगसम बनाने के लिए, किस अतिरिक्त सूचना की आवश्यकता है ?

(i) SAS कसौटी (ii) SSS कसौटी

S_1: स्पष्ट रूप से, (i) में वाँछित सूचना $\angle B = \angle F$ है।

S: तथा (ii) के लिए, यह CA=DE है।

T: बहुत अच्छे!

इस संवाद प्रक्रिया को किसी प्रश्न के परिणाम को या किसी प्रमेय को सिद्ध करने के लिए, एक समस्या हल करने की तकनीक के रूप में भी प्रयोग किया जा सकता है। इस उद्देश्य के लिए, निम्न बातों को ध्यान में रखना चाहिए:

(i) प्रश्न या प्रमेय के कथन के उच्चारण करने की इसलिए उपेक्षा नहीं करनी चाहिए कि यह प्रश्न में पहले से ही दिया हुआ है। यह याद रखना चाहिए कि यह न केवल उस विशिष्ट प्रश्न या प्रमेय के लिए एक आधार प्रदान करता है, अपितु आगे सीखने वाले अनेक प्रश्नों और प्रमेयों के लिए एक आधार प्रदान करता है।

(ii) बल समझने पर दिया जाना चाहिए न कि लिखने पर। यहाँ तक कि छोटे से छोटे बिंदु की चर्चा की जानी चाहिए तथा विद्यार्थियों को चाहिए कि वे जितने संभव तर्क दे सकें देने का प्रयास करें।

(iii) जहाँ भी आवश्यक हो, दिए हुए प्रतिबंधों को स्पष्ट रूप से समझाते हुए, हमें एक रफ आकृति खींचने का प्रयास करना चाहिए।

एक उदाहरण के लिए, निम्न समस्या पर विचार किया जा सकता है:

"सिद्ध कीजिए कि एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है"।

संवाद रूप में इसकी इस प्रकार चर्चा की जा सकती है:

(कक्षा में एक दृश्य)

T: एक समबाहु त्रिभुज क्या होता है?

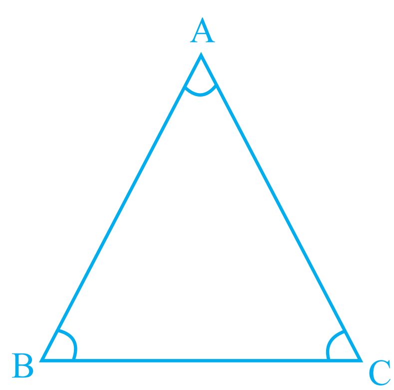
S_1: एक त्रिभुज जिसकी दो भुजाएँ बराबर हों।

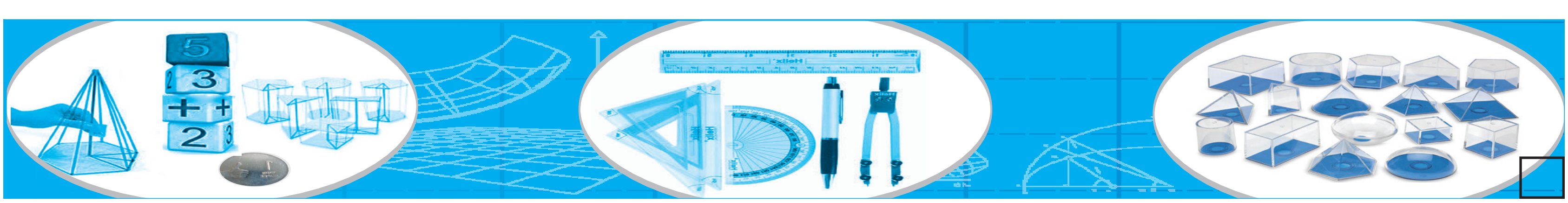
T: S_2, क्या S_1 सही है ?

S_2: नहीं मैडम। वह समद्विबाहु त्रिभुज की बात कर रहा है।

T: तब, सही क्या है?

S_2: एक त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर हो।





T: ठीक! यदि ABC एक समबाहु त्रिभुज है, तो भुजाओं BC, CA और AB के बारे में क्या कहा जा सकता है ? (आप दी हुई आकृति को देख सकते हैं)

S_3: मैडम, AB=BC=CA

T: क्या यह सही है ?

S: हाँ, मैडम।

T: कैसे?

S: क्योंकि $\angle A = \angle C$ और $\angle A = \angle B$ है।

T: ठीक है। क्या आपको $\angle A + \angle B + \angle C$ का मान ज्ञात है?

S: यह 180^0 के बराबर है, मैडम।

T: शाबाश! आप $\angle A$ के बारे में क्या कह सकते हैं?

S: $\angle A = 180^0 \div 3 = 60^0$

T: तब, $\angle B$ और $\angle C$ के बारे में क्या कहा जा सकता है?

S: इनमें प्रत्येक भी 60^0 का है।

T: आपने क्या सीखा या सिद्ध किया?

संपूर्ण कक्षा: एक समबाहु त्रिभुज का प्रत्येक कोण 60^0 का होता है।

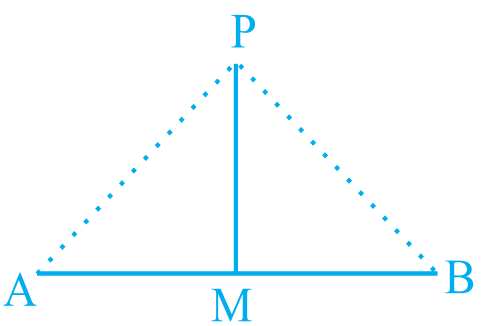
दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता की विभिन्न कसौटियों के अनुप्रयोगों की चर्चा करते समय, शिक्षक को निम्नलिखित दो परिणामों को भी उजागर करना चाहिए तथा सिद्ध करना चाहिए:

(a) किसी रेखाखंड के लंब समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस रेखाखंड के अंत बिंदुओं से समदूरस्थ होता है तथा इसका विलोम।

(b) किसी कोण के समद्विभाजक पर स्थित प्रत्येक बिंदु उस कोण की दोनों भुजाओं से समदूरस्थ होता है तथा इसका विलोम।

(a) के विलोम भाग को संवाद रूप में आपके लिए नीचे दर्शाया गया है:

T: विलोम के लिए, हमें यह दर्शाना है कि यदि एक बिंदु P रेखाखंड AB के अंत बिंदुओं A और B से समदूरस्थ है, तो P रेखाखंड AB के लंब समद्विभाजक पर स्थित होता है। अत:, आइए एक रेखाखंड AB लें जिसका मध्य-बिंदु M है तथा इसे बिंदु P से मिलाएँ, जो A और B से समदूरस्थ है।अब हमें क्या करने की आवश्यकता है?



S_1: हमें यह दर्शाने की आवश्यकता है कि $PM \perp AB$ और $MA = MB$ है।

T: क्या हमें कोई वस्तु पहले ही दी हुई है ?

S_2: हाँ MA=MB (क्योंकि M मध्य-बिंदु है)।

T: आगे क्या किया जाना है ?

S_3: दर्शाना कि $PM \perp AB$ है।

T: आप क्या सुझाव देते हैं ?

S_4: PA और PB को मिलाइए।

T: ऐसा करने का विचार आपको कैसे आया ?

S: क्योंकि PA=PB दिया है ।

T: अब आपको क्या प्राप्त हुआ ?

S_5: दो त्रिभुज PMA और PMB।

T: क्या हम कह सकते हैं कि ये सर्वांगसम हैं ?

S_3: हमें जाँच करनी पड़ेगी।

T: अत: आइये ΔPMA और ΔPMB को देखें। आप क्या देखते हैं ?

S_6: PA=PB (दिया है)

S_7: MA=MB (दिया है)

S_8: तथा PM=PM (उभयनिष्ठ)

S_9: अत:, $\Delta PMA \cong \Delta PMB$ (SSS द्वारा)

T: अब हम क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं ?

S_1: $\angle PMA = \angle PMB$ $(CPCT)$

S_2: परंतु $\angle PMA + \angle PMB = 180^0$ है।

T: इसका अर्थ है कि $\angle PMA + \angle PMA = 180^0$ है।

S_{10}: हां, मैडम! और इसलिए, $2\angle PMA = 180^0$ है।

S_1: अत: $\angle PMA = 90^0$, अर्थात् $PM \perp AB$ है।

T: इसका अर्थ हुआ कि AB पर PM लंब है तथा PM रेखाखंड AB को समद्विभाजित करता है। इस प्रकार, P रेखाखंड AB के लंब समद्विभाजिक पर स्थित है।

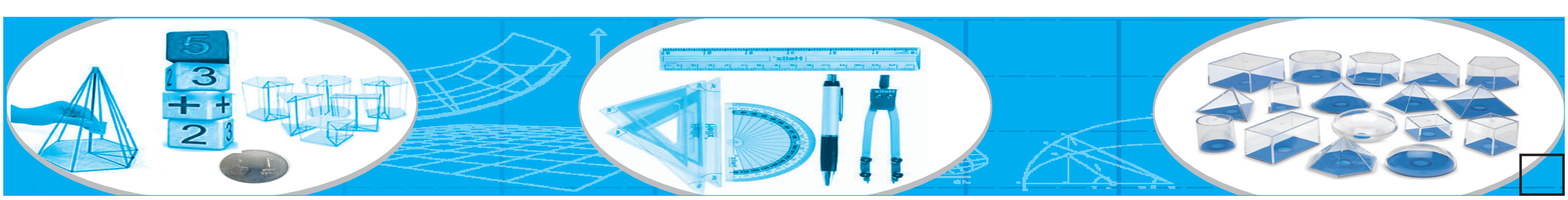
पुनरावलोकन

प्रश्न: उपरोक्त भाग (a), भाग (b) और उसके विलोम को संवाद विधि का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए।

उपरोक्त परिणामों का महत्व इस तथ्य में निहित है कि अनेक बार ये अन्य परिणामों को सिद्ध करने के लिए स्वयं प्रमेयों के रूप में प्रयोग किए जाते हैं।

(iii) एक त्रिभुज में असमिकाएँ

'त्रिभुजों' के अध्याय में, निम्न तीन असमिका संबंध दिए गए हैं।

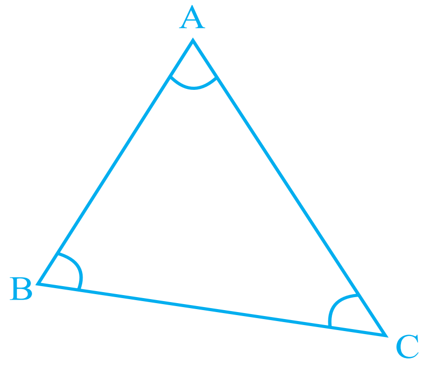


किसी त्रिभुज में,

(a) लंबी भुजा का सम्मुख कोण बड़ा होता है,

(c) बड़े कोण की सम्मुख भुजा लंबी होती है तथा

(c) किन्हीं दो भुजाओं का योग तीसरी भुजा से बड़ा होता है।



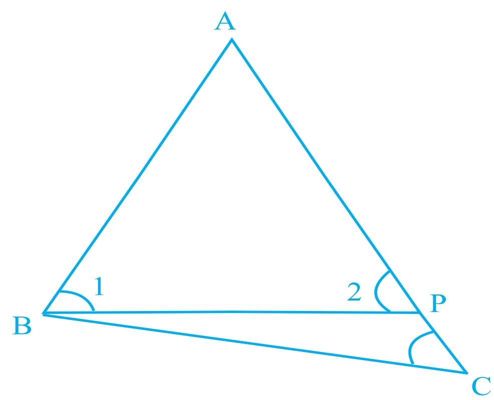
आइए परिणाम (a) पर विचार करें।

T: हमें क्या दिया है?

S_1: एक त्रिभुज ABC, जिसमें AC>AB है (देखिए आकृति)।

T: क्या सिद्ध किया जाना है?

S_1: AC का सम्मुख कोण ($\angle B$) AB के सम्मुख कोण ($\angle C$) से बड़ा है। अर्थात् $\angle B > \angle C$ है।



T: आपको AC>AB दिया हुआ है। क्या AB पर एक बिंदु ऐसा ले सकते हैं कि AP=AC है।

S_2: नहीं, मैडम!

T: क्या आप AC पर एक बिंदु P ऐसा ले सकते हैं कि AP=AB है?

S_2: हाँ मैडम, यह संभव है।

T: AC पर एक बिंदु P लीजिए और BP को मिलाइये (देखिये आकृति)। आपको क्या प्राप्त हो गया है?

S_3: एक त्रिभुज ABP, जिसमें AB=AP है।

T: आप $\angle 1$ और $\angle 2$ के बारे में क्या कह सकते हैं ?

S_3: $\angle 1 = \angle 2$ है।

T: क्यों ?

S_4: बराबर भुजाओं के सम्मुख कोण बराबर होते हैं।

T: $\angle 2 = \angle C$ है ?

S_4: नहीं, मैडम।

T: क्यों ?

S_4: क्योंकि $\angle 2$ त्रिभुज PBC का एक बहिष्कोण है तथा एक बहिष्कोण सदैव अपने प्रत्येक अंत: सम्मुख कोण से बड़ा होता है।

T: अत:, क्या आप कह सकते हैं कि $\angle 1 > \angle C$ है ?

S_4: हाँ, मैडम, क्योंकि $\angle 1 = \angle 2$ है।

T: क्या आप कह सकते हैं कि $\angle 1 + \angle PBC > \angle C$ है ?

S_5: स्पष्टत:, हाँ। वास्तव में, $\angle 1 + \angle PBC$ कोण C से और भी अधिक बड़ा होगा।

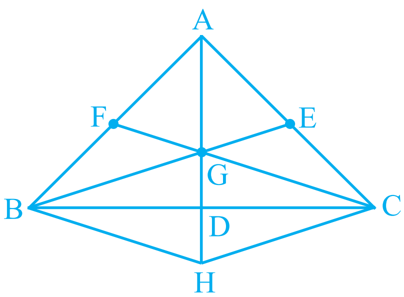
T: $\angle 1 + \angle PBC$ क्या है ?

S$_6$: यह $\angle B$ है।

T: अत:, क्या यह सत्य नहीं है कि $\angle B > \angle C$ है ?

S: संपूर्ण रूप से सत्य है, मैडम।

पुनरावलोकन



1. संवाद विधि द्वारा उपरोक्त परिणामों (b) और (c) को सिद्ध कीजिए।
2. विशिष्ट प्रकार के चतुर्भुज, जैसे समांतर चतुर्भुज, आयतों, इत्यादि पर अधिकांशत: परिणाम दो त्रिभुज सर्वांगसमता पर आधारित हैं। इन परिमाणों को संवाद रूप में सिद्ध करने का प्रयास कीजिए।
3. मध्य-बिंदु प्रमेय और उसके विलोम को संवाद विधि से सिद्ध कीजिए।
4. संवाद रूप के माध्यम से,सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज की माध्यिकाएँ एक बिंदु पर मिलती हैं तथा यह बिंदु (जो त्रिभुज का **केन्द्रक** कहलाता है) प्रत्येक माध्यिका को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है। [संलग्न आकृति की सहायता लीजिए , जिसमें BE और CF माध्यिकाएँ हैं तथा AG=GH है।]

(v) आकृतियों की समरूपता

ज्यामिति में दैनिक जीवन से संबंधित एक अन्य महत्वपूर्ण अवधारणा आकृतियों की समरूपता की अवधारणा है। इस पहले से ही सीखी गई सर्वांगसमता की अवधारणा की सहायता से धीरे-धीरे स्पष्ट किया जाना चाहिए। यह देखा जाना चाहिए कि दो आकृतियाँ सर्वांगसम कही जाती हैं, जब उनके समान आकार हों और उनकी समान माप हों। परंतु, दो आकृतियों समरूप कही जाती हैं, जब उनके आकार सामान हों। उनकी माप समान हो सकती हैं या नहीं भी हो सकती हैं। इस प्रकार, सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं परंतु इसका विलोम सत्य नहीं है। विभिन्न फोटोग्राफों के संवर्धन, विश्व या एक देश के विभिन्न मापों में बने मानचित्र, इत्यादि आकृतियों की समरूपता के अच्छे उदाहरण हैं। विद्यार्थियों के मस्तिष्क से यह भावना दूर कर देनी चाहिए कि

(i) समरूपता केवल समतल आकृतियों में विद्यमान होती है।

(ii) समरूपता केवल त्रिभुजों में विद्यमान होती है।

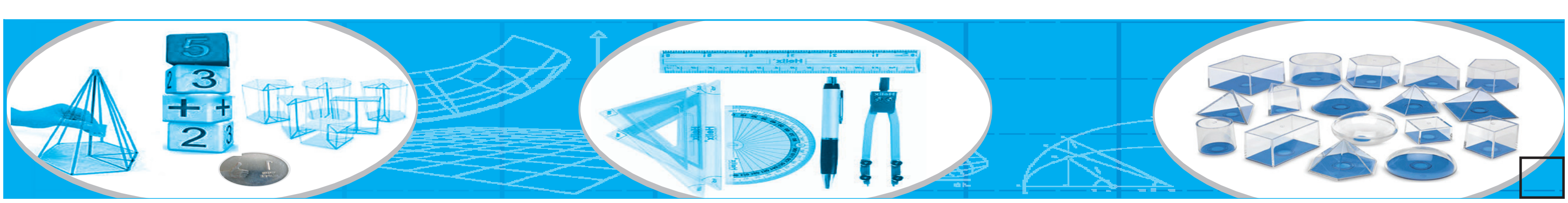
वस्तुत: त्रिविमीय आकृतियों में भी समरूपता होती है।

उदाहरणतार्थ, सभी घन समरूप होते हैं, सभी एक चतुष्फलक समरूप होते हैं, इत्यादि। इससे आगे, हम अन्य आकृतियों में मरूपता देखते हैं।

उदाहरणतार्थ, सभी वर्ग समरूप होते हैं, भुजाओं की एक ही संख्या वाले सभी सम बहुभुज समरूप होते हैं, सभी वृत्त समरूप होते हैं, इत्यादि।

कक्षा X की गणित की पाठ्यपुस्तक (एन.सी.ई.आर.टी.) में जो क्रियाकलाप सुझाए गए हैं उनके द्वारा आप यह स्पष्ट कर सकते हैं कि दो बहुभुज समरूप कहे जाते हैं, यदि

(i) उनके संगत कोण बराबर हों तथा



(ii) उनकी संगत भुजाएँ समानुपाती हों।

परंतु त्रिभुजों की स्थिति में, यह सिद्ध किया जा चुका है कि उपरोक्त दोनों प्रतिबंधों में से एक प्रतिबंध से दूसरा प्रतिबंध सत्य हो जाता है। इसीलिए, दो त्रिभुजों की समरूपता स्थापित करने के लिए , केवल एक ही प्रतिबंध पर्याप्त है, जिन्हें AAA समरूपता और SSS समरूपता कसौटियों के रूप में जाना जाता है। इन परिणामों को आधारभूत समानुपातिकता प्रमेय (BPT) (इसे थेल्स प्रमेय भी कहा जाता है) और विलोम से संबंधित उपप्रमेयों के अनुप्रयोग से सिद्ध किया गया है।

AAA समरूपता कसौटी को संवाद रूप में नीचे दर्शाए अनुसार सिद्ध किया जा सकता है:

T: हमें दो त्रिभुज ABC और PQR इस प्रकार दिए हैं कि $\angle A = \angle P, = \angle Q$ और $\angle C = \angle R$ हैं तथा हमें सिद्ध करना है कि ये त्रिभुज समरूप हैं (देखिये आकृति)। त्रिभुज की समरूपता को प्राप्त करने के लिए, अन्य कौन से संबंध की आवश्यकता है?

S_1: संगत भुजाएँ समानुपाती होनी चाहिए।

T: इसका अर्थ क्या है?

S_1: सर, इसका अर्थ $\frac{AB}{PQ} = \frac{BC}{QR} = \frac{CA}{RP}$ है।

T: कैसे आगे बढ़ें? हम AB और PQ के बारे में क्या कह सकते हैं?

S_2: यहाँ तीन संभावनाएँ हैं:

(i) AB=PQ

(ii) AB<PQ और

(iii) AB>PQ

T: अत:, पहली संभावना, अर्थात् AB=PQ लीजिए।

S_3: यदि AB=PQ है, तो $\Delta ABC \cong \Delta PQR$, ASA सर्वांगसमता कसौटी से

T: इसका क्या अर्थ है?

S_3: इसका अर्थ है कि $\Delta ABC \cong \Delta PQR$ है।

T: क्यों?

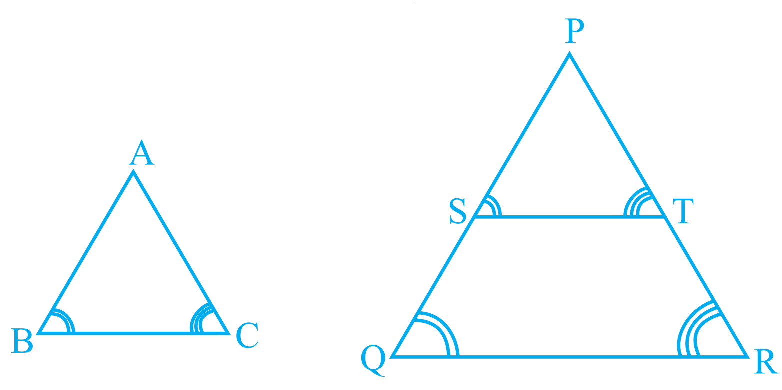
S_3: सभी सर्वांगसम आकृतियाँ समरूप होती हैं।

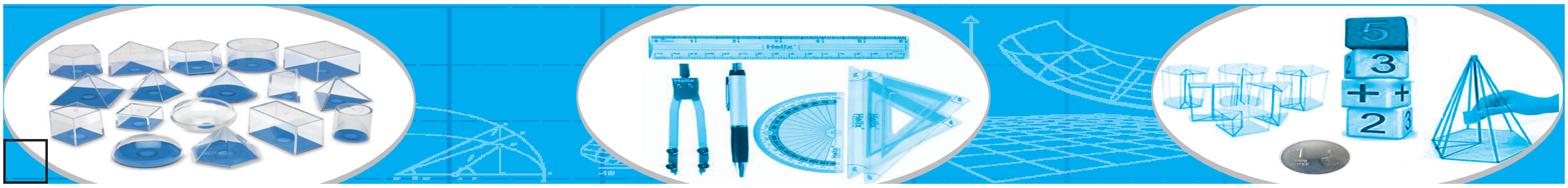
T: ठीक है। अब दूसरी संभावना, अर्थात् AB<PQ लीजिए। क्या आप PQ पर एक बिंदु S ऐसा ले सकते हैं कि AB=PS हो?

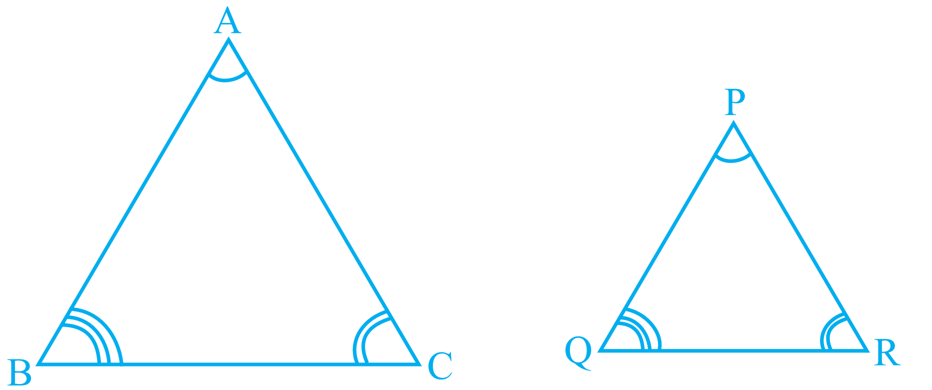
S_3: हाँ, सर।

T: S से होकर, ST || QR खींचिए (देखिए आकृति)।

S_3: मैंने ST || QR इस प्रकार खींची है कि







T भुजा PR पर स्थित है।

T: आप $\angle S$ और $\angle Q$ के बारे में क्या कह सकते हैं?

S_4: ये बराबर हैं।

T: क्यों?

S_4: क्योंकि ये समांतर रेखाओं ST और QR को तिर्यक रेखा QP के प्रतिच्छेदन से बने संगत कोण हैं।

T: $\angle T$ और $\angle R$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

S_4: ये भी बराबर हैं, क्योंकि ये पुन: संगत कोण हैं।

T: परंतु $\angle B = \angle Q$ दिया है। आप $\angle B$ और $\angle S$ के बारे में क्या कह सकते हैं?

S_5: $\angle B = \angle S$ है।

T: $\angle C$ और $\angle T$ के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

S_5: इसी प्रकार, $\angle C = \angle T$ है।

T: क्या आप कह सकते हैं कि $\Delta ABC \cong \Delta PST$ है?

S_6: हाँ, सर!

T: सर्वांगसमता की किस कसौटी द्वारा?

S_6: ASA सर्वांगसमता कसौटी द्वारा।

T: यदि $\Delta ABC \cong \Delta PST$ है, तो आप इनकी भुजाओं के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

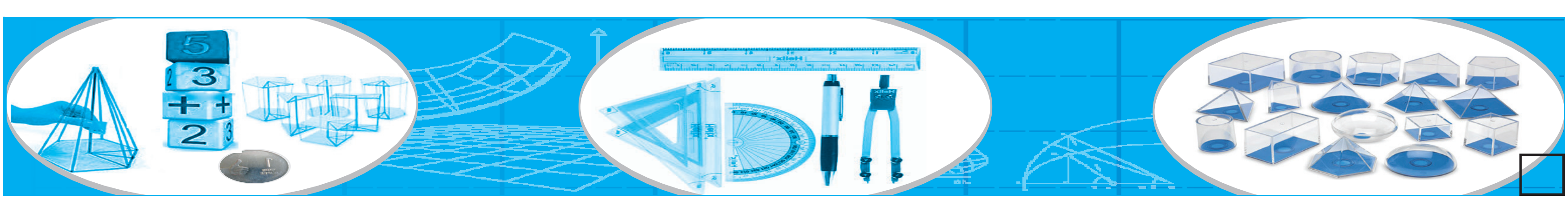
S_6: AB=PS, AC=PT और BC=ST (CPCT)

T: आपने ST || QR खींची है।

S_7: हाँ, सर!

T: अत:, आप $\frac{PS}{PQ}$ और $\frac{PT}{PR}$ के बारे में क्या कह सकते हैं?

S_7: $\frac{PS}{PQ} = \frac{PT}{PR}$



T: क्यों?

S_7: BPT की उपप्रमेय से।

T: क्या अब आप कह सकते हैं कि $\frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{PR}$ है?

S_7: हाँ, सर, क्योंकि AB=PS और AC=PT है।

T: इसी प्रकार, BC पर एक उपयुक्त बिंदु लेकर, आप $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}$ प्राप्त कर सकते हैं।

S_7: अत:, हमें $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}=\frac{AC}{PR}$ प्राप्त हो गया है।

T: इसका अर्थ क्या है?

S_8: इसका अर्थ है कि दोनों त्रिभुजों की संगत भुजाएँ समानुपाती हैं।

T: इसका अर्थ है कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।

S_9: हाँ सर, क्योंकि दोनों प्रतिबंध संतुष्ट हो गए हैं।

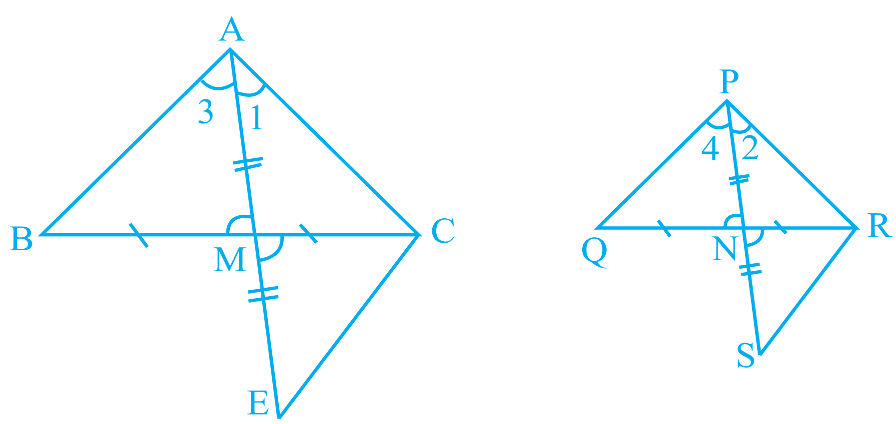
T: स्थिति AB>PQ पर इसी प्रकार चर्चा की जा सकती है। मुझे विश्वास है कि आपने अधिगम में आनंद लिया होगा।

S: हाँ, सर।

समस्या हल करने की तकनीकों की चर्चा हेतु एक समस्या (इकाई 6 भी देखिए)

समस्या: ABC और PQR दो त्रिभुज इस प्रकार हैं कि, $\frac{AB}{PQ}=\frac{AC}{PR}=\frac{AM}{PN}$, जहाँ AM और PN क्रमश:दोनों त्रिभुजों की माध्यिकाएँ हैं। सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है।

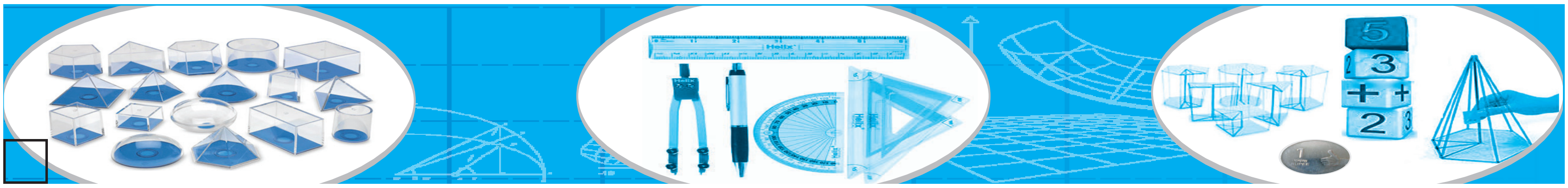
T: पहले समस्या में दिए हुए प्रतिबंधों के अनुसार एक आकृति बनाइए, जैसी नीचे खींची गई है।



S_1: हमने आकृति खींच ली है।

T: त्रिभुजों के समरूपता के लिए, हमें $\frac{AB}{PQ}=\frac{BC}{QR}$ दर्शाने की आवश्यकता है।

S_1: $\frac{AB}{PQ}$ को $\frac{BC}{QR}$ से कैसे जोड़े?



T: इसका अर्थ है कि हमें $\frac{AM}{PN}$ के स्थान पर $\frac{BC}{QR}$ लाना चाहिए। अर्थात्, हमें पहले $\frac{AM}{PN}$ और $\frac{BC}{QR}$ में संबंध जानने का प्रयास करना चाहिए।

S_2: वास्तव में, यह सरल कार्य नहीं है। हमें सोचना चाहिए।

S_3: मुझे याद आ रहा है कि माध्यिकाओं से संबंधित एक समस्या को हल करते समय, हमने माध्यिका AD को एक बिंदु E तक इस प्रकार बढ़ाया था कि AD = DE हो तथा EC को मिलाया था और AB = CE प्राप्त किया था।

T: आइए इन दोनों त्रिभुजों ABC और PQR में, हम यही करें। अत:AM को E तक इस प्रकार बढ़ाएँ कि AM=ME हो तथा PN को S तक बढ़ाएँ कि PN=NS हो। फिर, EC और SR मिलाइए (देखिए आकृति)।

S_1: $\Delta ABM \cong \Delta ECM$ (SAS) और $\Delta PQN \cong \Delta SRN$ (SAS)

S_2: अत:, AB = CE और PQ = RS है (CSCT)

T: क्या $\frac{\text{AB}}{\text{PQ}} = \frac{CE}{RS}$ है?

S: हाँ

T: क्यों?

S_3: क्योंकि AB = CE और PQ = RS है।

S_4: इसी प्रकार, $\frac{AM}{PN} = \frac{2AM}{2PN}$। अर्थात्, $\frac{AM}{PN} = \frac{AE}{PS}$

T: इसका अर्थ है कि ΔACE और PRS में, हमें $\frac{CE}{RS} = \frac{AC}{PR} = \frac{AE}{PS}$ प्राप्त है।

S_5: अत: $\Delta ACE \sim PRS$

T: कौन सी कसौटी से?

S_5: SSS समरूपता कसौटी से।

T: क्या आप कह सकते हैं कि $\angle 1 = \angle 2$ है?

S_6: हां, सर।

T: क्यों?

S_6: समरूप त्रिभुजों के संगत कोण हैं।

T: यह आप यह भी दर्शा सकते हैं कि $\angle 3 = \angle 4$ है?

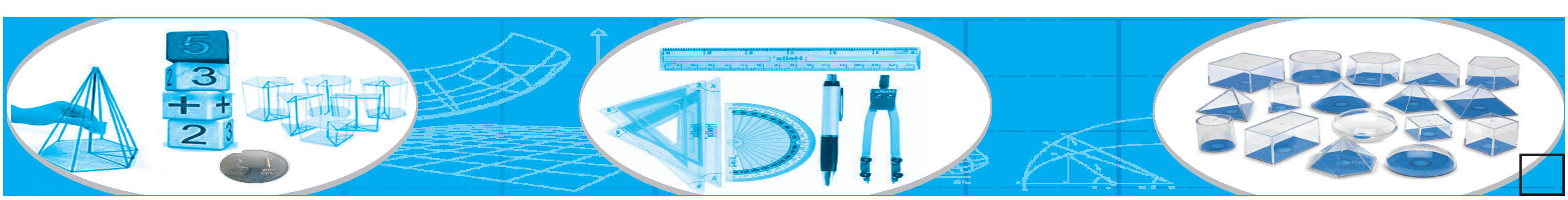
S_7: हाँ, सर।

T: कैसे?

S_7: BE और QS को मिलाकर तथा यह स्थापित कर कि $\Delta AMC \cong \Delta EMB$ है तथा $\Delta PNR \cong \Delta SNQ$ है।

T: अत: $\angle 1 + \angle 3 = \angle 2 + \angle 4$ है।

S_7: हाँ, सर।



T: इसका अर्थ है कि $\angle BAC = \angle QPR$ है।

S_8: हाँ, सर।

T: अत: ΔABC और ΔPQR में $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR}$ और $\angle BAC = \angle QPR$ है।

S_9: हाँ, सर।

T: क्या आप कह सकते हैं कि है ?

S_9: हां, सर।

T: कौन सी कसौटी से?

S_9: SAS समरूपता कसौटी से।

T: इस प्रकार, हमने परिणाम सिद्ध कर लिया है।

S: हाँ, सर। हमारी तकनीक ने काम किया।

पुनरावलोकन

(1) समरूपता की अन्य दो कसौटियों, अर्थात् SSS और SAS समरूपता कसौटियों को संवाद विधि अपनाते हुए , सिद्ध कीजिए।

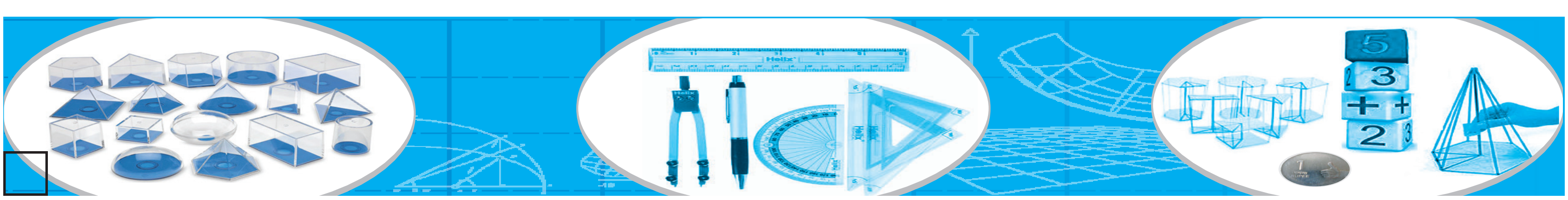
(2) दो त्रिभुजों की समरूपता को सांकेतिक रूप में शीर्षों की सही संगतता के अनुसार लिखने के महत्व को स्पष्ट कीजिए।

(3) क्या ऐसे दो त्रिभुज हो सकते हैं जिनमें उनके भागों के पाँच युग्म बराबर हों परंतु वे सर्वांगसम नहीं हों? यदि हाँ, तो त्रिभुजों के एक ऐसे युग्म को खींचिए। यदि नहीं, तो त्रिभुजों के एक ऐसे युग्म को खींचिए।

(V) पाइथागोरस प्रमेय

यहाँ, इस बात पर बल दिया जा सकता है कि इस प्रमेय को अनेक विधियों से सिद्ध किया जा चुका है। इसकी एक उपपत्ति एन.सी.ई.आर.टी. की कक्षा IX की गणित पाठ्यपुस्तक में, गुण "यदि एक त्रिभुज और एक समांतर चतुर्भुज एक ही आधार पर और एक ही समांतर रेखाओं की बीच स्थित हों, तो ar (समांतर चतुर्भुज) =2ar (त्रिभुज)" का प्रयोग करते हुए दी गई है तथा समरूपता की अवधारणा का प्रयोग करते हुए, एक उपपत्ति की चर्चा एन.सी.ई.आर.टी. की कक्षा X की गणित पाठ्यपुस्तक में की गई है। इसके अतिरिक्त, इससे संबंधित अनेक क्रियाकलाप एन.सी.ई.आर.टी. द्वारा प्रकाशित कक्षा VII की गणित पाठ्यपुस्तक तथा विभिन्न विद्यालय स्तरों के लिए प्रकाशित प्रयोगशाला मेनुयलों में दिए गए हैं। इन सभी की विद्यार्थियों द्वारा ध्यानपूर्वक जाँच करनी चाहिए, जिससे उन्हें इस प्रमेय की बेहतर समझ प्राप्त हो सके। शिक्षक प्राचीन भारतीय गणितज्ञ बोधायन (800BC) द्वारा दिए गए कथन की भी चर्चा कर सकता है तथा उसकी पाइथागोरस प्रमेय के साथ अनुकूलता को स्पष्ट कर सकता है। इसके बाद,पाइथागोरस प्रमेय के साथ समरूपता के अनुप्रयोगों की चर्चा की जा सकती है, अधिक विशेष रूप से त्रिकोणमिति के अध्ययन में। यह भी स्पष्ट किया जा सकता है कि इसके कथन में, 'वर्ग' के स्थान पर प्रत्येक जगह सम बहुभुज या अर्धवृत्त लिखा जा सकता है।

उदाहरणार्थ, एक समकोण त्रिभुज में, दो भुजाओं पर बने समबाहु त्रिभुजों का योग कर्ण पर बने समबाहु त्रिभुज के बराबर होता है, इत्यादि।



पुनरावलोकन

(1) निम्नालिखित में से कौन से कथन सत्य हैं और कौन से असत्य हैं?

(i) एक समकोण त्रिभुज में, दो भुजाओं पर बने आयतों का योग कर्ण पर बने आयत के बराबर होता है।

(ii) एक समकोण त्रिभुज में, दो भुजाओं पर बने अर्धवृत्तों का योग कर्ण पर बने वर्ग के बराबर होता है।

(2) एन.सी.ई.आर.टी. की X की गणित पाठ्यपुस्तक की प्रश्नावली 6.6 के प्रश्न 5 में, यह कहा गया है कि माध्यिका AD वाले ΔABC में $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$ होता है (पाइथागोरस प्रमेय का एक विस्तार)। इस परिणाम का प्रयोग करते हुए, पहले चर्चा की गई एक समस्या की संवाद विधि का उपयोग करते हुए, एक वैक्लिपक उपपत्ति प्रदान कीजिए, जो नीचे दी गई है:

" यदि AM और PN दो त्रिभुजों ABC और PQR की क्रमशः माध्यिकाएँ इस प्रकार हैं। कि $\frac{AB}{PQ} = \frac{AC}{PR} = \frac{AM}{PN}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABC \sim \Delta PQR$ है। "

(vi) वृत्त

यद्यपि विद्यार्थी वृत्त और उसके भागों जैसे त्रिज्या, केन्द्र, व्यास, परिधि, जीवा, चाप, त्रिज्यखंड, इत्यादि की अवधारणाओं से बहुत प्रारंभ से ही परिचित हो जाते हैं, परंतु इसका औपचारिक ज्यामिति अध्ययन स्वयं कक्षा IX से प्रारंभ होता है तथा वृत्त पर स्पर्श रेखाओं के साथ कक्षा X में समाप्त होता है। कक्षाओं IX और X की गणित पाठ्यपुस्तकों में दिए गए सभी गुणों को प्रश्न हल करने में उनके अनुप्रयोग से पहले उपयुक्त उदाहरणों द्वारा स्पष्ट किया जाना चाहिए। यह देखा जा सकता है कि अधिकतर स्थानों पर त्रिभुजों की सर्वांगसमता तथा पाइथागोरस प्रमेय का ज्ञान अति आवश्यक है। साथ ही, ये सभी गुण परस्पर बहुत निकट से संबंधित हैं और इसीलिए इनसे संबंधित समस्याओं को या तो सीधे एक अकेली प्रमेय का प्रयोग करके हल किया जा सकता है या फिर कभी-कभी दो या अधिक प्रमेयों के संयोजन द्वारा हल किया जा सकता है। यहाँ पुन: समस्या हल करने की तकनीकों (इकाई 6 भी देखिए) को संवाद विधि द्वारा नीचे दिए अनुसार स्पष्ट किया जा सकता है:

समस्या 1: सिद्ध कीजिए कि चक्रीय समलंब सदैव समद्विबाहु होता है।

T: आइये एक चक्रीय समलंब ABCD पर विचार करें, जिसमें AB || DC है (देखिए आकृति)। हम यह दर्शाना चाहते हैं कि यह समद्विबाहु है, अर्थात् AD = BC है। कैसे प्रारंभ करें?

S_1: $\angle A + \angle C = 180°$

T: क्यों?

S_1: $\angle A$ और $\angle C$ चक्रीय चतुर्भुज ABCD के सम्मुख कोण हैं।

T: ठीक है! आप AB || DC से क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

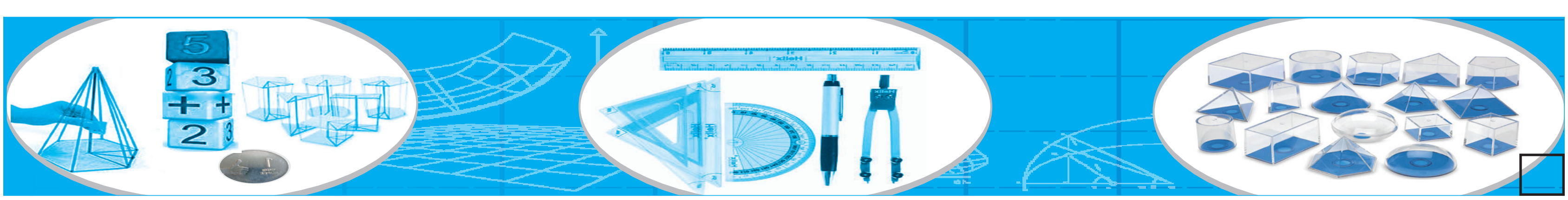
S_2: $\angle A + \angle D = 180^0$

T: क्यों ?

S_2: तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत:कोण

T: अत:, क्या आप कह सकते हैं कि $\angle C = \angle D$ है?

S_3: हाँ, सर।

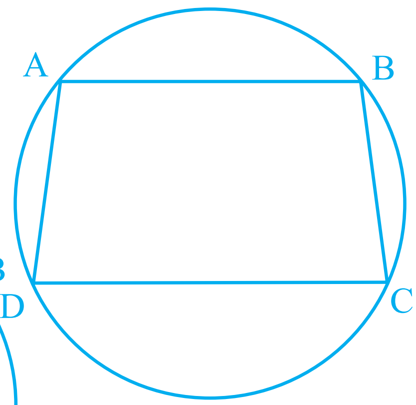


T: कैसे।

S$_3$: $\angle A + \angle C = \angle A + \angle D$ से (क्योंकि दोनों = 180^0 हैं)

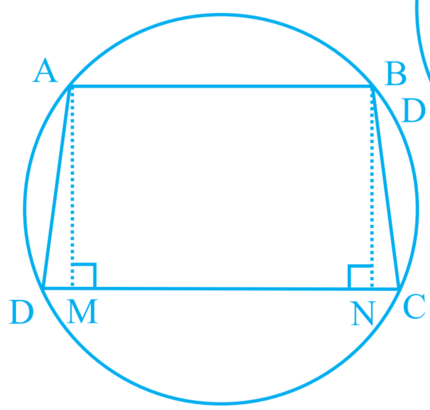
T: परंतु हम AD=BC चाहते हैं।

S$_4$: आइए AD और BC से संबंद्धित दो त्रिभुज प्राप्त करें।



T: कैसे?

S$_4$: $AM \perp DC$ और $BN \perp DC$ खींचिए (देखिए आकृति)।



T: कौन से दो त्रिभुज दो त्रिभुज प्राप्त हुए हैं ?

S$_4$: ΔADM और ΔBCN

T: बहुत अच्छे ! अब, आइए इनकी सर्वांगसमता की जाँच करें।

S$_5$: AM = BN

T: क्यों?

S$_5$: दो समांतर रेखाओं के बीच की दूरी सभी स्थानों पर समान होती है।

T: और आगे क्या?

S$_5$: $AMD = BNC$ (प्रत्येक =90^0)

और $\angle D = \angle C$ (पहले ही दर्शाया है)

T: क्या अब आप कह सकते हैं कि $\Delta ADM \cong \Delta BCN$ है?

S$_6$: हाँ, सर।

T: कौन सी कसौटी से?

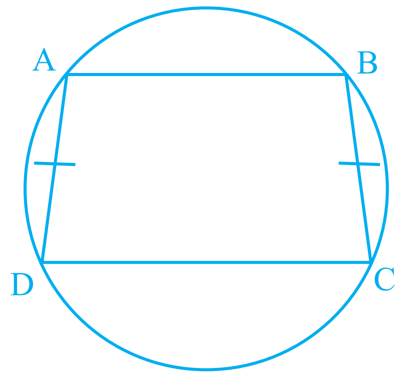
S$_6$: AAS कसौटी से।

S$_7$: अत:, AD=BC है।

T: क्यों?

S$_7$: CPCT से

समस्या 2: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है, जिसमें AD = BC है। सिद्ध कीजिए कि ABCD एक समलंब है।



T: हमें एक चक्रीय चतुर्भुज ABCD दिया है, जिसमें AD = BC है (देखिए आकृति)। हमें AB||DC दर्शाने की आवश्यकता है। कैसे प्रारम्भ करें ?

S_1: AB||DC दर्शाने के लिए,हमें एकांतर कोणों के एक युग्म को प्राप्त करने का प्रयास करना चाहिए।

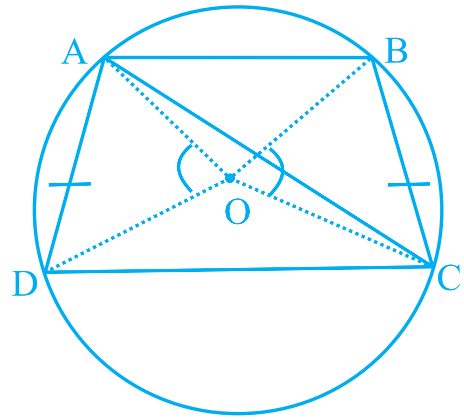
S_2: AC को मिलाइये। हम $\angle ACD$ और $\angle BAC$ प्राप्त करते हैं।

T: क्या ये बराबर हैं?

S_2: हमें पता नहीं। आइए जाँच करें।

T: वृत्त का केन्द्र O लीजिए।

S_3: आइए OA, OC, और OD को मिलाइए (देखिये आकृति।)

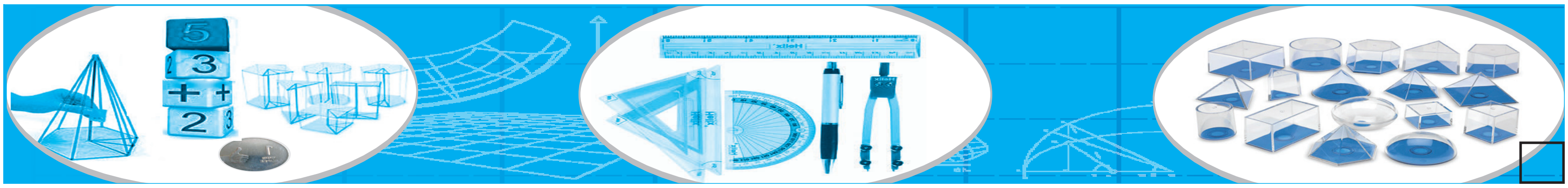


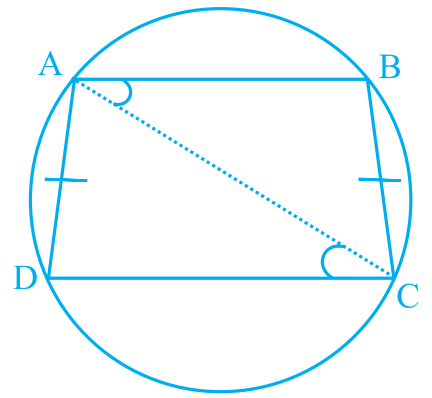
T: क्या आप कह सकते हें कि $\angle AOD = \angle BOC$ है?

S_3: हाँ

T: क्यों?

S_3: क्योंकि AD=BC है तथा एक वृत्त की बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं।





T: क्या $\angle ACD, \angle AOD$ से संबंधित है?

S_4: हाँ, सर। $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOC$ है।

T: क्यों?

S_4: केन्द्र पर कोण वृत्त पर स्थित किसी बिंदु पर बने कोण का दुगुना होता है।

T: इसी प्रकार, $\angle BAC = \frac{1}{2}\angle BOD$ है। क्या ऐसा नहीं है?

S_4: हाँ, सर। उसी तर्क द्वारा।

S_5: अत:, $\angle ACD = \angle BAC$ है।

T: कैसे?

S_5: क्योंकि $\angle AOD = \angle BOC$ पहले ही दर्शाया है।

T: तब, AB और DC के बारे में क्या कहा जा सकता है?

S_5: AB||DC है।

T: क्यों?

S_5: क्योंकि $\angle ACD$ और $\angle BAC$ एकांतर कोण हैं।

इस स्तर पर, इस तथ्य को उजागर किया जा सकता है कि **वृत्त की दो बराबर जीवाओं की स्थिति में, हम सीधे कह सकते हैं कि इनके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित बिंदुओं पर कोण बराबर होंगे।** ऐसा हम निम्न दो गुणों के आधार पर कर सकते हैं:

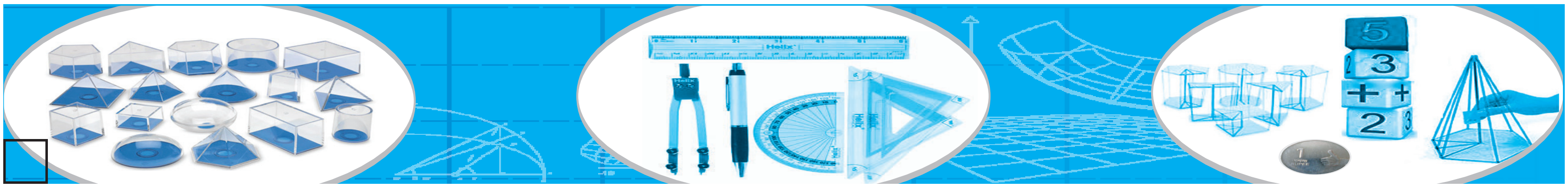
(i) बराबर जीवाएँ केन्द्र पर बराबर कोण अंतरित करती हैं तथा

(ii) किसी चाप द्वारा वृत्त के केन्द्र पर अंतरित कोण उसके द्वारा वृत्त के शेष भाग पर स्थित किसी भी बिंदु पर अंतरित कोण का दुगुना होता है।

समस्या 3: एक समबाहु त्रिभुज ABC के परिवृत्त के लघु चाप BC पर P कोई बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि AP = BP+CP है।

T: एक समबाहु त्रिभुज क्या होता है?

S_1: एक त्रिभुज जिसकी तीनों भुजाएँ बराबर होती हैं। इस प्रकार, ΔABC में AB = BC = CA है तथा प्रत्येक कोण 60^0 है।



T: एक त्रिभुज का परिवृत्त क्या है?

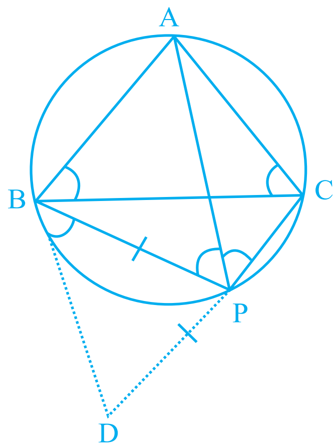
S_2: एक वृत्त जो त्रिभुज के तीनों शीर्षों से होकर जाता है। इस प्रकार, D ΔABC का परिवृत्त A, B और C से होकर जाएगा।

T: ठीक है! लघु चाप BC क्या है?

S_3: एक वृत्त में सामान्यत: दो चाप BC होते हैं, जिनमें से एक छोटा और एक बड़ा होता है। छोटा चाप लघु चाप कहलाता है।

T: बहुत अच्छे! इस ज्ञान के साथ, क्या आप आकृति खींच सकते हैं?

S_4: हाँ, सर। इसे यहाँ खींचा गया है (देखिये आकृति)।



T: क्या अब आप सिद्ध कर सकते हैं कि AP = BP+CP है?

S_4: नहीं। यहाँ एक कठिनाई है।

T: क्या कठिनाई है?

S_4: **LHS में, एक ही रेखाखंड AP है तथा RHS में, दो रेखाखंडों BP और CP का योग है।**

T: इस कठिनाई से कैसे निपटा जाए?

S_5: हमें BP+CP के बराबर एक अकेला रेखाखंड प्राप्त करने का प्रयास करना चाहिए।

T: ऐसा कैसे किया जा सकता है ?

S_6: CP को एक बिंदु D तक इस प्रकार बढ़ाइए कि PD = BP हो (देखिये आकृति)।

S_7: इस प्रकार, हमें CD = CP+PD = CP+BP प्राप्त हो गया है।

S_6: इसका अर्थ है कि हमने BP+CP के बराबर एक अकेला रेखाखंड CD प्राप्त कर लिया है।

T: अब आगे का क्या किया जाना है?

S_6: हमें AP = CD दर्शाना है।

T: इसे किस प्रकार किया जाए?

S_7: हमें दो त्रिभुज ऐसे देखने चाहिए, जिनमें भुजाएँ AP और CD संबद्ध हों।

T: हमारे पास एक भुजा AP से संबद्ध एक ΔABP है। भुजा CD वाला एक त्रिभुज कैसे प्राप्त किया जाए?

S_8: B, D को मिलाइए (देखिये आकृति)। हमें ΔCBD प्राप्त होता है, जिसमें एक भुजा CD है।

T: AP = CD स्थापित करने के लिए, हमें क्या करना चाहिए?

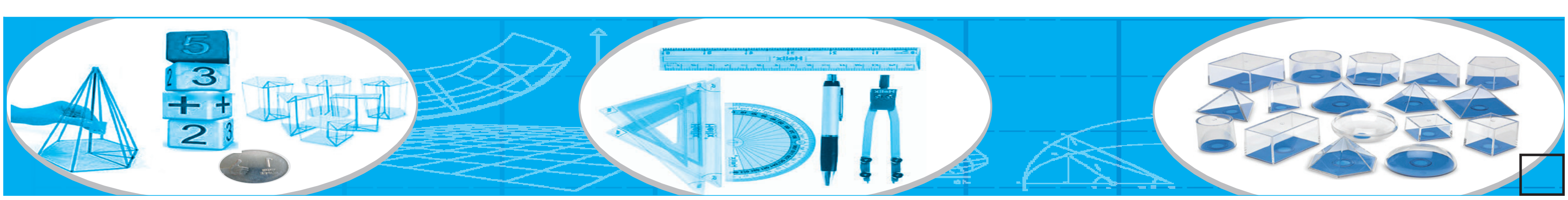
S_8: हमें यह दर्शाने का प्रयास करना चाहिए कि त्रिभुज ABP और CDB सर्वांगसम हैं।

T: आइए देखें कि हम ऐसा कैसे कर सकते हैं।

S_8: आइए अपनी रचना, अर्थात् BP = PD से प्रारंभ करें।

S_9: क्योंकि BP = PD, है इसलिए $\angle PBD = \angle PDB$ है।

S_{10}: साथ ही, $\angle APB = \angle ACB = 60^0$ (एक ही वृत्तखंड में कोण) और $\angle APB = \angle ABC = 60^0$ (एक ही वृत्तखंड में कोण) है।



T: $\angle PBD$ के बारे में हम क्या कह सकते हैं?

S_{10}: यह $180^0 - 60^0 - 60^0 = 60^0$ के बराबर है।

T: अत:, $\angle PBD = \angle PDB$ क्या है?

S_{10}: यह $180^0 - \angle BPD$, अर्थात् $180^0 - 60^0 = 120^0$ है।

T: परंतु $\angle PBD = \angle PDB$ आप पहले ही दर्शा चुके हैं। अत:, अब आप आगे क्या कह सकते हैं?

S_9: हम कह सकते हैं कि $\angle PBD + \angle PDB = 120^0$ है, अर्थात् $\angle PBD = 60^0$ है तथा साथ ही $\angle PDB = 60^0$ है। अत: हमें BD = BP = PD प्राप्त होता है।

T: तब, $\angle PBD + \angle PBC$ क्या है?

S_9: यह $\angle CBD = 60^0 + \angle PBC$ है।

T: $\angle APB$ के बारे में क्या कहा जा सकता है?

S_{10}: यह $\angle ABC + \angle PBC$ है, जो $60^0 + \angle PBC$ के बराबर है।

T: आप $\angle ABP$ और $\angle CBD$ के बारे में क्या कह सकते हैं?

S_{10}: ये बराबर हैं, अर्थात् $\angle ABP = \angle CBD$ है।

T: क्या:, अब आप दर्शा सकते हैं कि $\Delta ABP \cong \Delta CBD$ है ?

S_{10}: हाँ, सर।

T: कैसे?

S_{10}: ΔABP और ΔCBD में,

AB = CB (समबाहु त्रिभुज ABC की भुजाएँ)

$\angle ABP = \angle CBD$ (ऊपर दर्शाया गया है)

तथा BP = BD (रचना से)

अत:, $\Delta ABP \cong \Delta CBD$ (SAS से)

T: आप इससे क्या निष्कर्ष निकाल सकते हैं?

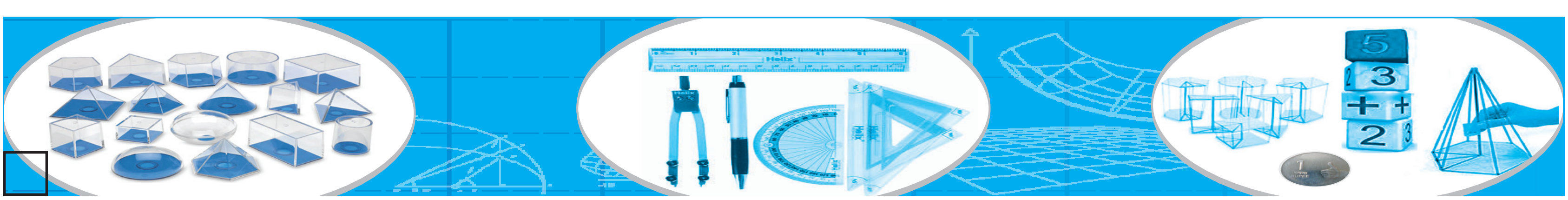
S_{10}: AP = CD (CPCT) और इसीलिए AP = BP+CP है।

पुनरावलोकन

संवाद विधि का प्रयोग करते हुए, सिद्ध कीजिए कि किसी वृत्त पर उसके बाहरी बिंदु से खींची गई दोनों स्पर्श रेखाएँ बराबर होती हैं।

समस्या प्रस्तुत करने की तकनीकें

समस्या हल करने की तरह ही 'समस्या प्रस्तुत करना' भी एक कला है। कक्षा में, विद्यार्थियों के परिपक्वता स्तर को दृष्टि में



रखते हुए ही समस्याएँ (प्रश्न) प्रस्तुत की जानी चाहिए। अपने विद्यार्थियों के स्तर के बारे में जानने के लिए, एक शिक्षक सबसे अच्छा निर्णयकर्ता है। समस्या प्रस्तुत करने के लिए, निम्नलिखित बिंदुओं को दृष्टिगत रखना चाहिए:

(i) समस्या (प्रश्न) की भाषा विद्यार्थियों की समझ के स्तर के अंतर्गत होनी चाहिए। यदि आवश्यक हो, तो इसे सरल किया जा सकता है अथवा प्रारंभ में समस्या को आकृति के साथ प्रस्तुत किया जा सकता है।

(ii) प्रारंभ में, केवल 'एक चरण' वाली समस्याएँ (या प्रश्न) दिऐ जा सकते हैं तथा धीरे-धीरे 'दो चरणों' वाली समस्याओं, 'तीन चरणों' वाली समस्याओं और फिर अधिक कठिन समस्याओं की ओर बढ़ा जा सकता है।

(iii) यदि आवश्यक हो तो, एक लंबी या कठिन समस्या (या प्रश्न) को एक भिन्न रूप में, केवल कुछ छोटे चरणों में विभक्त कर, प्रस्तुत किया जा सकता है। सुझावित प्रतिदर्श (नमूने) के रूप में, कुछ समस्याएँ नीचे दी गई हैं:

समस्या 1: यदि दो कोणों की भुजाएँ पृथक रूप से परस्पर समांतर हैं, तो सिद्ध कीजिए कि दोनों कोण या तो बराबर या संपूरक होते हैं।

सुझावित विभक्त योजना: इसे विभक्त कर नीचे दिए अनुसार प्रस्तुत किया जा सकता है:

(i) आकृति (i) में, BA||ED और BC||EF है। सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC = \angle DEF$ है।

(ii) आकृति (ii) में, BA||ED और BC||EF है। सिद्ध कीजिए कि $\angle ABC + \angle DEF = 180^0$ है।

समस्या 2: दर्शाइये कि किसी चतुर्भुज का परिमाप उसके विकर्णों के योग के दुगुने से कम होता है।

सुझावित विभक्त योजना: ABCD एक चतुर्भुज है, जिसके विकर्ण परस्पर बिंदु O पर प्रतिच्छेद करते हैं (देखिये आकृति।) दर्शाइये कि

(i) OA+OB>AB

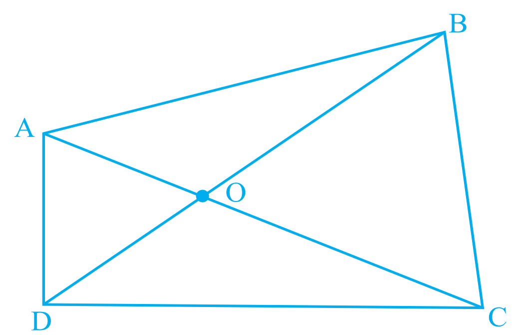
(ii) OB+OC>BC

(iii) OC+OD>CD

(iv) OD+OA>AD

(v) (OA+OB+OB+OC+OD+OD+OA)>AB+BC+CD+AD

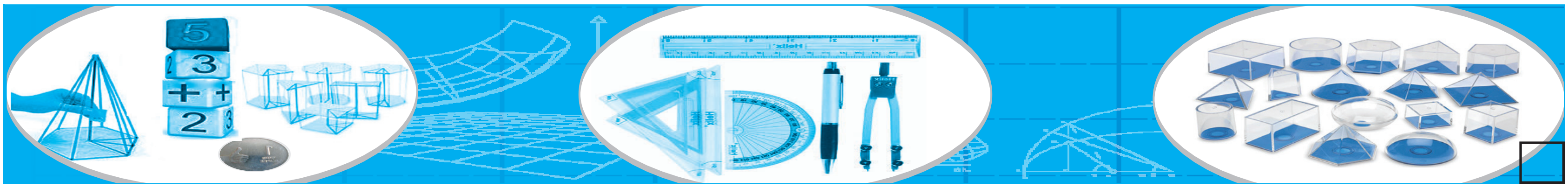
(vi) 2(AC+BD) >AB+BC+CD+AD

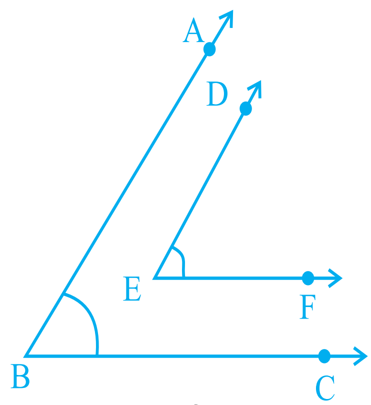


समस्या 3: सिद्ध कीजिए कि एक त्रिभुज के एक कोण का समद्विभाजक और उसकी सम्मुख भुजा का लंब समद्विभाजक, यदि प्रतिच्छेद करते हैं, तो उस त्रिभुज के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करेंगे।

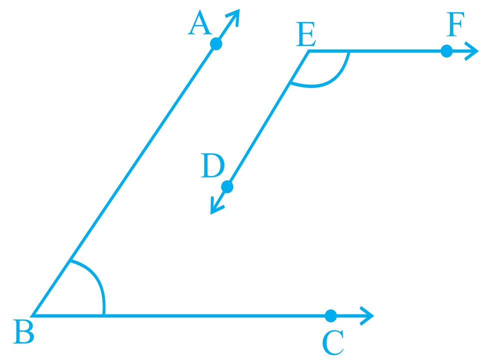
सुझावित विभक्त योजना (i) ΔABC के $\angle A$ का समद्विभाजक ΔABC के परिवृत्त को बिंदु P पर प्रतिच्छेद करता है। सिद्ध कीजिए कि PB = PC है, अर्थात P भुजा BC के लंब समद्विभाजक पर स्थित है (देखिये आकृति)।

सुझावित विभक्त योजना: (ii) ΔABC के परिवृत्त P पर एक ऐसा बिंदु स्थित है कि PB=PC है, अर्थात् P भुजा BC के लंब समद्विभाजक पर स्थित है। सिद्ध कीजिए कि $\angle PAB = \angle PAC$ है, अर्थात् AP कोण BAC का समद्विभाजक है (देखिये आकृति)।





आकृति: 1



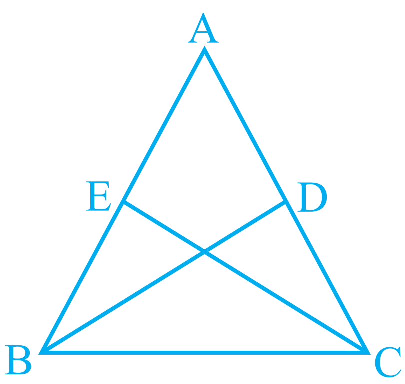
आकृति: 2

पुनरावलोकन

1. दर्शाइये कि किसी चतुर्भुज का परिमाप उसके विकर्णों के योग से बड़ा होता है। उपरोक्त प्रश्न के लिए, समस्या प्रस्तुत करने के लिए, एक उपयुक्त विभक्त योजना सुझावित कीजिए।

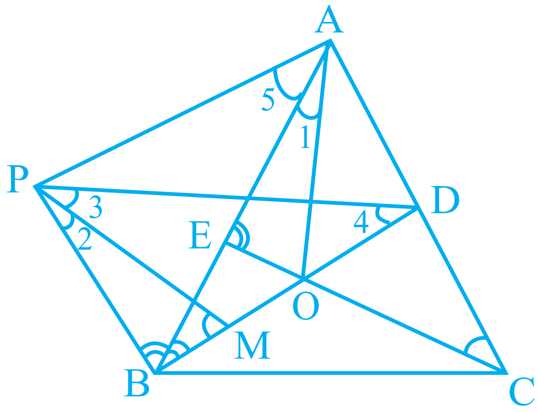
संवर्धक सामग्री

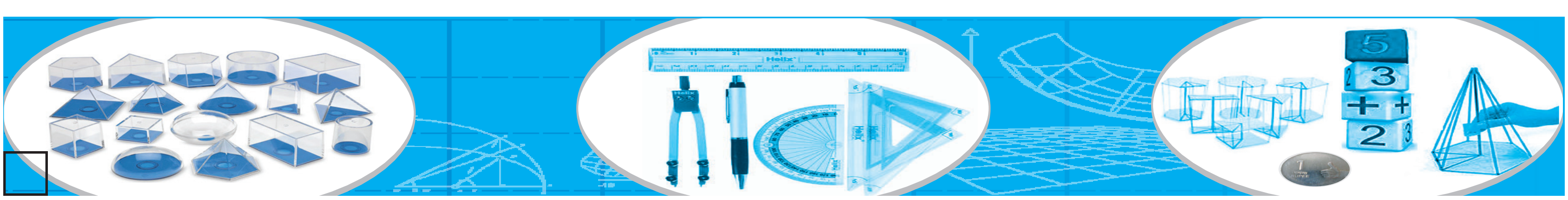
यहाँ, कुछ सामग्री प्रदान की जा रही हैं, जो सामान्यत: स्कूल गणित पाठ्यपुस्तक और पाठ्यचर्या में उपलब्ध नहीं होती है। यह केवल रुचि रखने वाले विद्यार्थियों के लिए ही है तथा इस आशय से दी जा रही है कि कोई व्यक्ति इस सामग्री को स्कूल गणित पाठ्यचर्या के भाग में सम्मिलित करने के बारे में नहीं सोचे। यह केवल सुझावित है और विस्तृत या संपूर्ण नहीं है।



(i) संलग्न आकृति में, BD और CE क्रमश: ΔABC के $\angle B$ और $\angle C$ के समद्विभाजक इस प्रकार हैं कि BD=CE है। सिद्ध कीजिए कि ABC एक समद्विभाजक त्रिभुज है।

हल: $\Delta PBD \cong \Delta AEC$ की रचना कीजिए। साथ ही, $\angle BPD$ समद्विभाजक खींचिए जो BD को M पर प्रतिच्छेद करे तथा A को BD और CE के प्रतिच्छेद बिंदु O से मिलाइये। AP को मिलाइये (देखिये आकृति।)





क्योंकि $\Delta PBD \cong \Delta AEC$ है, अत: $\angle BPD = \angle BAD$ (CPCT) तथा $\angle PBD = \angle AEC$ (CPCT) है। साथ ही, AO कोण BAC का समद्विभाजक है। (किसी त्रिभुज के तीनों कोणों के समद्विभाजक एक ही बिंदु पर मिलते हैं।)

अत: , $\angle 1 = \frac{1}{2}\angle A$

साथ ही, $\angle 2 = \frac{1}{2}\angle BPD$

अत:, $\angle 1 = \angle 2$

अब ΔPBM और ΔAEO में, हमें प्राप्त है:

PB = AE (क्योंकि $\Delta PBD \cong \Delta AEC$, CPCT)

$\angle 1 = \angle 2$

तथा $\angle PBM = \angle AEO$ $\angle PBD = \angle AEC$

अत:, $\Delta PBM \cong AEO$ (ASA कसौटी)

अत:, PM = AO (CPCT) (i)

अब, $\angle 5 = \angle 4$ (PADB एक चक्रीय चतुर्भुज है)

तथा , $\angle 1 = \angle 3$ (प्रत्येक $\frac{1}{2}\angle A$ के बराबर है)

अत:, $\angle 5 + \angle 1 = \angle 4 + 3$

परंतु ΔPMD से, $\angle 4 + \angle 3 + \angle PMD = 180^0$

अत:, $\angle 5 + \angle 1 + \angle PMD = 180^0$

या, $\angle PAO + \angle PMD = 180^0$

अर्थात्, चतुर्भुज PAOM में, सम्मुख कोणों का एक युग्म संपूरक है। इसलिए, चतुर्भुज PAOM एक चक्रीय चतुर्भुज है। इस चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ PM और AO बराबर हैं। [(i) में सिद्ध किया है]

इसलिए, PAOM एक समलंब है, जिसमें PA || MO है। (देखिये समस्या हल करने की तकनीकों की समस्या 2, जिसकी वृत्त P में चर्चा की गई है।)

अत:, PA || BD

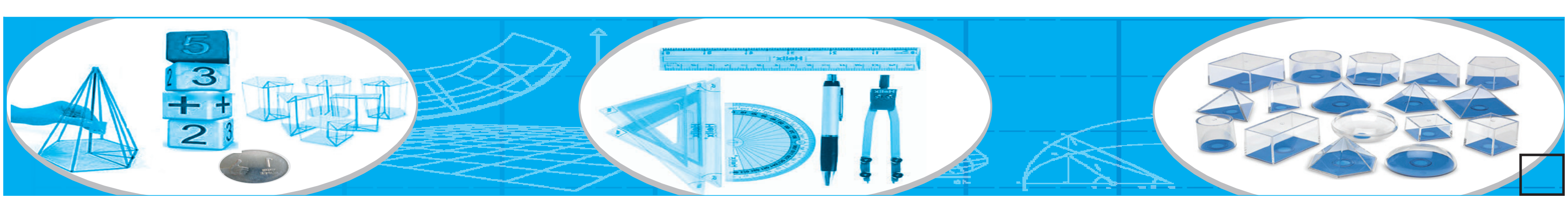
इसलिए, $\angle 5 = \angle ABD$ (एकांतर कोण)

अर्थात्, $\angle 5 = \frac{1}{2}\angle B$ (क्योंकि $\angle B$ का समद्विभाजक BD है)

साथ ही, $\angle 5 = \angle 4$ (PADB चक्रीय है)

तथा $\angle 4 = \angle ACF$ ($\Delta PDB \cong \Delta ACE$,CPCT)

अत:, $\angle 4 = \frac{1}{2}\angle C$



इसलिए, (2) और (3) से,

$$\frac{1}{2}\angle B = \frac{1}{2}\angle C$$

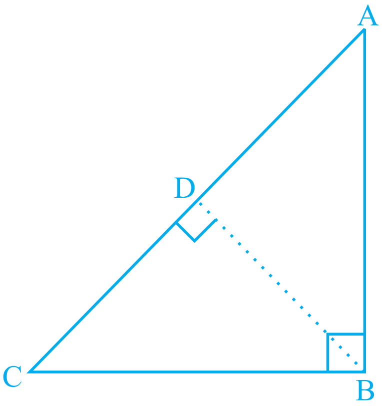
या $\angle B = \angle C$

अत:, AB = AC (बराबर कोणों की सम्मुख भुजाएँ)

अर्थात् ΔABC समद्विबाहु हैं।

(ii) निर्गम द्वारा (बाहर करते हुए) पाइथागोरस प्रमेय की उपपत्ति दिया है:

ABC एक समकोण त्रिभुज है, जिसका कोण B समकोण है (देखिये आकृति)।



सिद्ध करना है: $AC^2 = AB^2 + BC^2$

रचना: $BD \perp AC$ खींचिए।

उपपत्ति: मान लीजिए कि $AC^2 \neq AB^2 + BC^2$ है।

अत:, या तो (i) $AC^2 > AB^2 + BC^2$

या (ii) $AC^2 < AB^2 + BC^2$ होगा।

(i) $AC^2 > AB^2 + BC^2$ **मानने पर, हमारा आशय होगा कि प्रत्येक समकोण त्रिभुज में कर्ण का वर्ग अन्य दोनों भुजाओं के वर्गों के योग से अधिक है।**

अत:, Δ ABC से,

$$AC^2 > AB^2 + BC^2 \qquad (1)$$

Δ ADB से ,

$$AB^2 > AD^2 + BD^2 \qquad (2)$$

तथा ΔBDC से,

$$BC^2 > BD^2 + DC^2 \qquad (3)$$

(2) और (3) को जोड़ने पर,

$$AB^2 + BC^2 > AD^2 + DC^2 + 2BD \qquad (4)$$

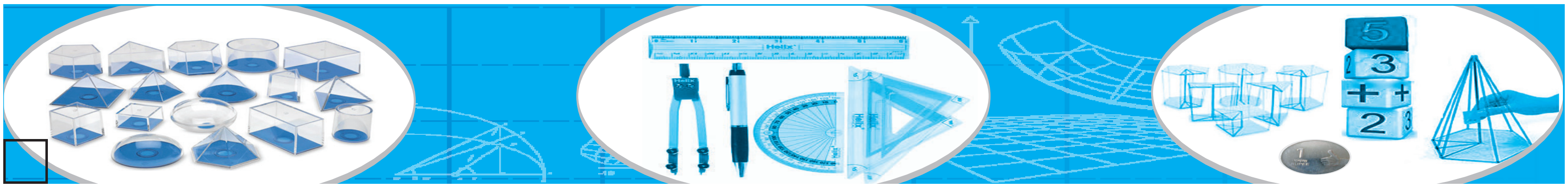
अब हमें प्राप्त है:

Δ ADB~Δ BDC (किसी समकोण त्रिभुज के समकोण वाले शीर्ष से कर्ण पर डाला गया लंब त्रिभुज को दो समरूप त्रिभुजों में विभाजित करता है)

अत:, $$\frac{AD}{BD} = \frac{BD}{CD}$$

या, $$AD \times CD = BD^2 \qquad (5)$$

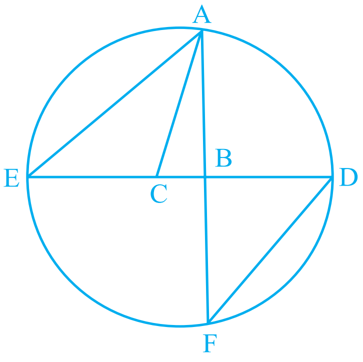
अत:, (4) और (5) से ,



$$AB^2 + BC^2 > AD^2 + DC^2 + 2AD \times CD$$

या, $AB^2 + BC^2 > (AD + DC)^2$

या, $AB^2 + BC^2 > AC^2$, जो इस कल्पना का विरोधाभास है कि $AC^2 > AB^2 + BC^2$ है।



इसी प्रकार, $AC^2 > AB^2 + BC^2$ लेने पर, हम इस परिणाम पर पहुँचेंगे कि $AC^2 < AB^2 + BC^2$ है, जो हमारी कल्पना का विरोधाभास है। इस उपपत्ति को कभी-कभी **पाइथागोरस प्रमेय की असमिका उपपत्ति** भी कहा जाता है।

(iii) पाइथागोरस प्रमेय का प्रयोग किए बिना पाइथागोरस प्रमेय को सिद्ध करना

मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है, जिसमें $AC^2 = AB^2 + BC^2$ है।

हमें $\angle ABC = 90^0$ सिद्ध करना है।

रचना: C को केन्द्र और CA त्रिज्या लेकर, एक वृत्त खींचिये। मान लीजिए CB को बढ़ाने पर वह वृत्त को D और E पर काटता है। साथ ही, मान लीजिए कि AB बढ़ाने पर वृत्त को F पर प्रतिच्छेद करता है।

AE और DF को मिलाइए (देखिये आकृति)।

उपपत्ति:

हमें दिया है : $AC^2 = AB^2 + BC^2$

$AC^2 - BC^2 = AB^2$

अत:, $(AC + BC)\,(AC - BC) = AB^2$

या, $(CE + BC)\,(CD - BC) = AB^2$ (क्योंकि $AC = CE = CD$)

या, $BE \times BD = AB^2$ …(1)

अब हमें प्राप्त है:

$\Delta ABE \sim \Delta DBF$ ($\angle E = \angle F$, $\angle ABE = \angle DBF$, AA समरूपता)

अत:, $\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BE}{BF}$ …(2)

या $BD \times BE = AB \times BF$

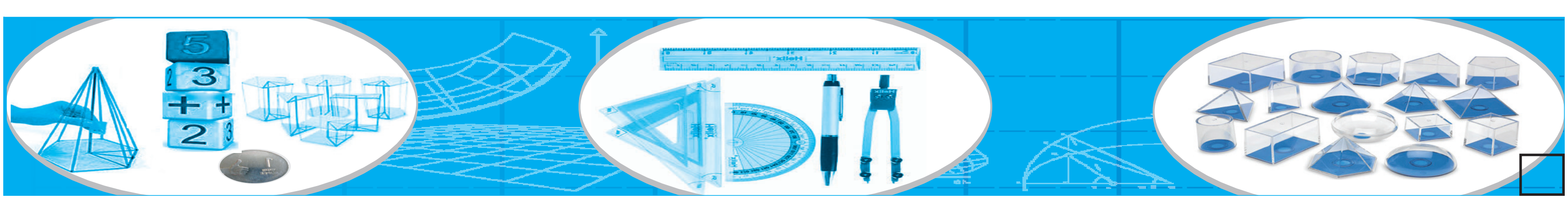
(1) और (2) से, हमें प्राप्त होता है:

$AB^2 = AB \times BF$

या $AB \times AB = AB \times BF$

या $AB = BF$

इसलिए, B जीवा AF का मध्य-बिंदु है।



इसलिए, CB $\perp$ AF (जीवा के मध्य-बिंदु को केन्द्र से मिलाने वाला रेखाखंड जीवा पर लंब होता है)

अत:, $\angle$ABC = 90° है।

(iv) ऑयलर रेखा

सिद्ध कीजिए कि, व्यापक रूप में, एक त्रिभुज का लंब केन्द्र, केन्द्रक और परिकेन्द्र एक ही रेखा पर स्थित होते हैं तथा लंब केन्द्र और परिकेन्द्र को मिलाने वाले रेखाखंड को केन्द्रक 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है। (यह रेखा **ऑयलर रेखा** कहलाती है)

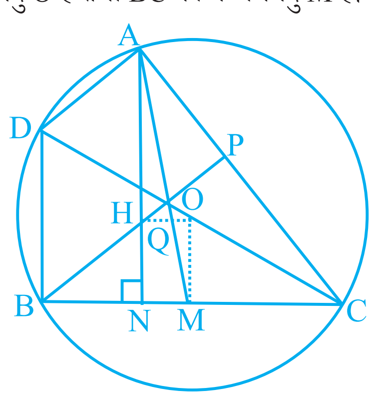
हल: इस समस्या को हल करने के लिए, हमें पहले निम्नलिखित परिणाम को सिद्ध करना पड़ेगा:

" एक त्रिभुज ABC के लंब केन्द्र H की शीर्ष A से दूरी उस त्रिभुज के परिकेन्द्र O से शीर्ष A की सम्मुख भुजा BC की दूरी की दुगुनी होती है (देखिये आकृति)।" ΔABC का H लंब केन्द्र और O परिकेन्द्र है। मान लीजिए कि $COD\Delta ABC$ के परिवृत्त का व्यास है।

रचना: BD को मिलाइए, AH को BC से N पर मिलने के लिए बढ़ाइए तथा BH को AC से P पर मिलने के लिए बढ़ाइए। साथ ही, AD को मिलाइए।

उपपत्ति: क्योंकि H लंब केन्द्र है, इसलिए AN $\perp$ BC और BP $\perp$ AC है।

अब, ΔCDM में, CD का मध्य-बिंदु O है तथा BC का मध्य-बिंदु M है।



अत:, BD || OM और BD=2OM है।   (मध्य-बिंदु प्रमेय)   (1)

साथ ही, AN || OM   (दोनों BC पर $\perp$ हैं)   (2)

अत:, BD || AN, अर्थात् BD||AH

पुन:, $\angle$DAC = 90^0 (अर्धवृत्त में कोण)

अत:, DA || BP, अर्थात् DA || BH   (3)

इसलिए, BDAH एक समांतर चतुर्भुज है। [(2)और (3) से]

अत:, BD = AH   (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएं)   (4)

परंतु BD = 2OM [(1) से]   (5)

अत:, AH = 2OM

अब, आइए AM को मिलाएँ ताकि वह HO को Q पर प्रतिच्छेद करे।

ΔAHQ और ΔMOQ पर विचार कीजिए।

AH || OM

अत:, $\angle$HAQ = $\angle$OMQ (एकांतर कोण)

साथ ही, $\angle$AQH = $\angle$MQO (शीर्षभिमुख कोण)

अत:, $\Delta AHQ \sim \Delta MOQ$ (AA समरूपता)

इसलिए, $\dfrac{AQ}{MQ}=\dfrac{HQ}{OQ}=\dfrac{AH}{OM}$

परंन्तु (5) से, $\dfrac{AH}{OM}=\dfrac{2}{1}$ है।

इसलिए, $\dfrac{AQ}{MQ}=\dfrac{HQ}{OQ}=\dfrac{2}{1}$

अर्थात्, $\dfrac{AQ}{MQ}=\dfrac{2}{1}$ (6)

तथा $\dfrac{HQ}{OQ}=\dfrac{2}{1}$ (7)

अब, AM त्रिभुज की एक माध्यिका है।

इसलिए, (6) से हम कह सकते हैं कि Q एक बिंन्दु है जो माध्यिका AM को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

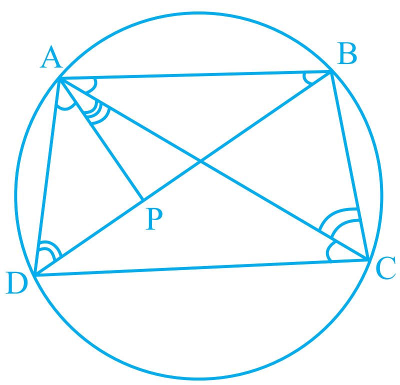
इसलिए, Q त्रिभुज का केन्द्रक है।

इस प्रकार, लंब केन्द्र, केन्द्रक और परिकेन्द्र (अर्थात् H, Q और O) एक ही रेखा पर स्थित हैं (जो ऑयलर रेखा कहलाती है)।

(7) से, $\dfrac{HQ}{OQ}=\dfrac{2}{1}$ है। अर्थात् Q रेखाखंड HO को 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है। दूसरे शब्दों में, लंब केन्द्र और परिकेन्द्र को मिलाने वाले रेखाखंड को केन्द्रक 2:1 के अनुपात में विभाजित करता है।

(v) टोल्मी प्रमेय को सिद्ध करना

यह कहती है कि किसी चक्रीय चतुर्भुज के विकर्णों का गुणनफल उसकी सम्मुख भुजाओं के गुणनफलों के योग के बराबर होता है।



दिया है: ABCD एक चक्रीय चतुर्भुज है।

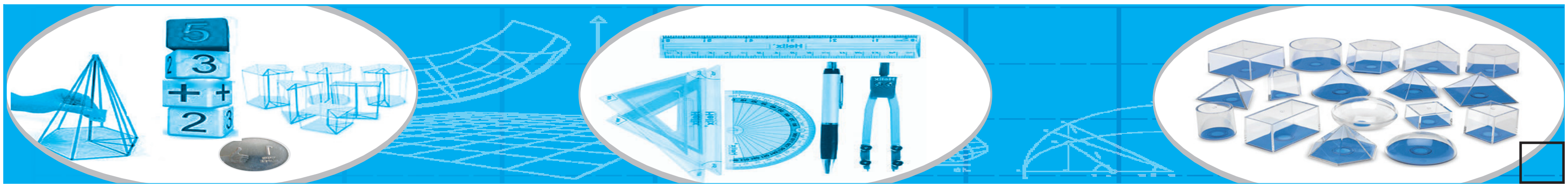
सिद्ध करना है: AC×BD = AB×DC+AD×BC

रचना: BD पर एक बिन्दु P इस प्रकार लीजिए कि $\angle$DAP = $\angle$BAC है।

उपपति: ΔADP और ΔACB में,

$\angle$DAP = $\angle$BAC (रचना)

और $\angle$ADP = $\angle$ACB (एक ही वृत्तखंड में कोण)



अत:, $\Delta ADP \sim \Delta ACB$ (AA समरूपता)

इसलिए, $\frac{AD}{AC} = \frac{DP}{BC}$

अर्थात्, $BC \times AD = AC \times DP$ (1)

अब, $\angle DAP + \angle PAC = \angle BAC + \angle PAC$ (क्यों?)

अत:, $\angle DAC = \angle BAP$

अब, ΔBAP और ΔCAD में,

$\angle BAP = \angle DAC$ (ऊपर दर्शाया है)

तथा $\angle ABP = \angle ACD$ (एक ही वृत्तखंड में कोण)

अत:, $\Delta BAP \sim \Delta CAD$ (AA समरूपता)

इसलिए, $\frac{AB}{AC} = \frac{BP}{DC}$ या $AB \times DC = BP \times AC$ (2)

(1) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है:

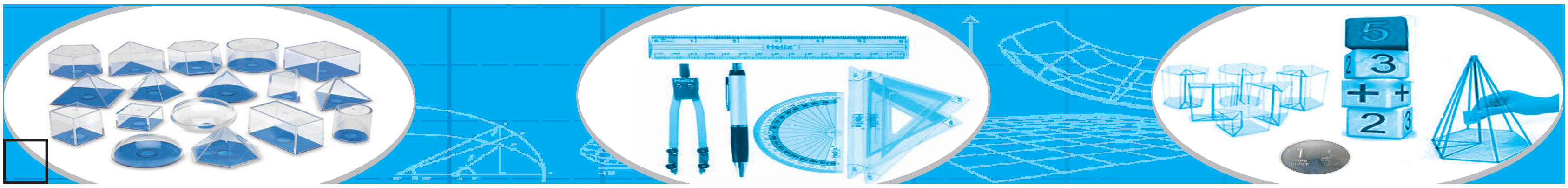
$BC \times AD + AB \times CD = AC\ (BP + DP) = AC \times BD$

ऐसी ही अन्य सामग्रियों की खोज करने का प्रयास कीजिए तथा उनके बारे में अपने मित्रों से चर्चा कीजिए।

3.5 भ्रांतियाँ

- अनेक बार विद्यार्थी अपरिभाषित पदों-बिंदु, रेखा और तल को परिभाषित करने का प्रयास करते हैं।
- कुछ विद्यार्थी दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता या दो त्रिभुजों की समरूपता को सांकेतिक रूप में सही संगतता के साथ नहीं लिख पाते हैं तथा इसी कारण गलत संगत भाग प्राप्त कर लेते हैं।
- कुछ विद्यार्थी दो त्रिभुजों की सर्वांगसमता के बारे में निर्णय लेते समय सही सर्वांगसमता कसौटी का प्रयोग नहीं कर पाते हैं तथा दो त्रिभुजों की समरूपता के बारे में निर्णय लेते समय सही समरूपता कसौटी का प्रयोग नहीं कर पाते हैं।
- कुछ विद्यार्थी यह कहते हैं कि यदि दो समांतर रेखाओं को एक तिर्यक रेखा प्रतिच्छेद करे, तो तिर्यक रेखा के एक ही ओर के अंत: कोण बराबर होते हैं।
- कुछ विद्यार्थी चाँदे पर अंकित दो स्केलों के उचित उपयोग को नहीं समझते हैं। इनमें से कुछ यह सोचते हैं कि एक स्केल न्यून कोण खींचने या मापने के लिए है तथा दूसरा स्केल अधिक कोण खींचने या मापने के लिए है।
- अनेक विद्यार्थी पटरी (रूलर) और परकार की रचना के अर्थ को नहीं समझते हैं। उन्हें इसका कोई ज्ञान नहीं है कि इन रचनाओं में, रूलर पर कोई चिन्ह अंकित करने की अनुमति नहीं है। इस गलत समझ के कारण वे कुछ रचनाओं, जैसे एक कोण का समद्विभाजन करना, में स्वंय अपनी ही विधि से रचना करते हैं।
- **फालेसीस**

  फालेसीस (हेत्वाभास या तर्कदोष, असंगत, तथ्य (Fallacies) गलत कल्पनाओं के कारण प्राप्त होते हैं।



उदाहरण1: प्रत्येक त्रिभुज समद्विबाहु है।

मान लीजिए कि ABC कोई त्रिभुज है।

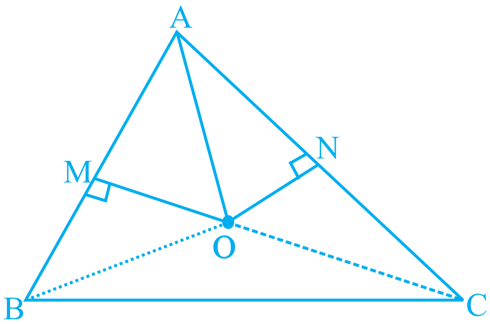
मान लीजिए कि $\angle A$ का समद्विभाजक तथा भुजा BC का लंब समद्विभाजक बिन्दु O पर मिलते हैं।

$OM \perp AB$ और $ON \perp AC$ खींचिए।

OB और OC को मिलाइए।

बिन्दु O कोण समद्विभाजक AO पर स्थित है।

अत:, OM = ON



अब, समकोण ΔAMO और ΔANO में, हमें प्राप्त है:

OM = ON (ऊपर सिद्ध किया है)

OA = OA (उभयनिष्ठ)

अत:, $\Delta AMO \cong ANO$ (RHS कसौटी)

इसलिए, AM = AN (CPCT) (1)

अब, समकोण ΔOBM और ΔOCN में, हमें प्राप्त है:

OM = ON (ऊपर सिद्ध किया है)

OB = OC (BC के लंब समद्विभाजक पर O स्थित है)

अत:, $\Delta OBM \cong \Delta OCN$ (RHS कसौटी)

इसलिए, BM = CN (CPCT) (2)

(l) और (2) को जोड़ने पर, हमें प्राप्त होता है:

$$AM + BM = AN + CN$$

अर्थात्, AB = AC

अत:, ΔABC समद्विबाहु है।

इस प्रकार, हमने किसी भी त्रिभुज से प्रांरभ किया है तथा इस परिणाम पर पहुँच गए हैं कि यह त्रिभुज समद्विबाहु है। इससे यह गलत तथ्य इंगित हो रहा है कि प्रत्येक त्रिभुज समद्विबाहु होता है।

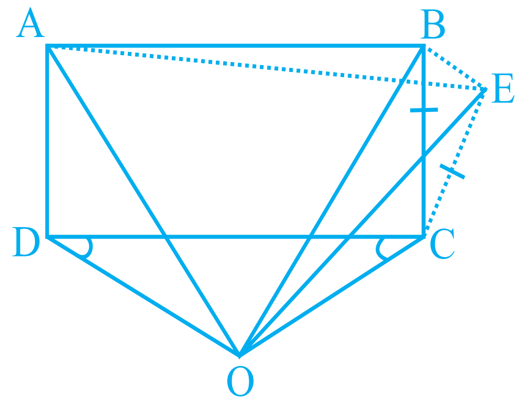
इस गलत तथ्य के बारे में सोचिए। याद कीजिए कि एक त्रिभुज की एक भुजा की लंब समद्विभाजक तथा इस भुजा के सम्मुख कोण का समद्विभाजक त्रिभुज के परिवृत्त पर प्रतिच्छेद करते हैं। यहाँ हमने O को त्रिभुज के अभ्यंतर में लिया है। स्पष्टत: इसे ΔABC के परिवृत्त पर लिया जाना चाहिए।

उदाहरण 2: एक अधिक कोण एक समकोण के बराबर होता है।

मान लीजिए कि ABCD एक आयत है तथा E एक बिन्दु इस प्रकार है कि CB = CE है।

AE को मिलाइए। मान लीजिए कि O, AB और AE के लंब समद्विभाजकों का प्रतिच्छेद बिन्दु है।

OA और OE को मिलाइए।



ΔOAD और ΔOEC में, हमें प्राप्त है:

OA = OE (O रेखाखंड AE के लंब समद्विभाजक पर स्थित है)

OD = OC (O रेखाखंड AB और इसीलिए CD के लंब समद्वि-भाजक पर स्थित है)

तथा AD = CE (क्योंकि AD = BC और BC = CE है)

इस प्रकार, $\Delta OAD \cong \Delta OEC$ (SSS कसौटी)

अत:, $\angle ODA = \angle OCE$ (CPCT) ....(1)

अब, क्योंकि OD = OC है,

इसलिए $\angle ODC = \angle OCD$ (समान भुजाओं के सम्मुख कोण) ...(2)

अत:, (1) और (2) से,

$\angle ODA - \angle ODC = \angle OCE - \angle OCD$

या $\angle ADC = \angle ECD$

या $\angle ADC = \angle ECD$

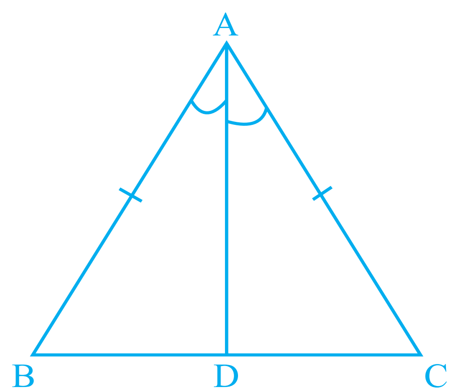
अर्थात्, **समकोण = अधिक कोण**

सोचिए! इसमें क्या गलत हुआ है?

ध्यान दीजिए कि बिन्दुओं A, B और E से O समदूरस्थ है। अत: O को ΔABE का परिकेन्द्र होना चाहिए। केवल तभी, हमें सही आकृति प्राप्त होगी। अर्थात् O को उस स्थान पर नहीं लिया जा सकता जो आकृति में दर्शाया गया है।

अमान्य विवेचन के प्रयोग से गलत उत्पति

कभी–कभी विद्यार्थी कुछ परिणामों को सिद्ध करने के लिए, गलत (अमान्य) विवेचन (या तर्कण) का प्रयोग करते हैं। कुछ उदाहरण नीचे दिए जा रहे हैं:



(i) यदि ΔABC में, AB = AC तथा $\angle A$ का समद्विभाजक AD है, तो सिद्ध कीजिए कि $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ है।

सम्भावित उपपति: ΔABD और ΔACD में,

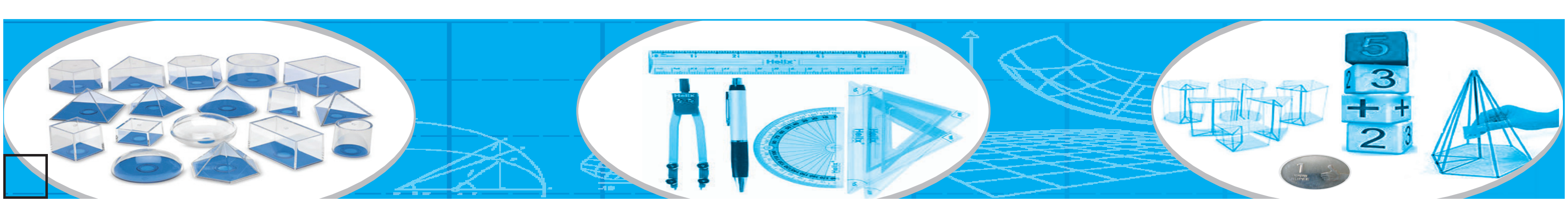
AB = AC (दिया है)

$\angle B = \angle C$ (क्योंकि AB = AC है)

$\angle BAD = \angle CAD$ (AD, $\angle A$ का समद्विभाजक है)

अत: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ (ASA सर्वागसमता कसौटी)

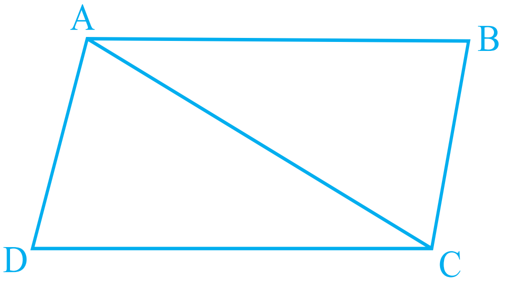
यह विवेचन एक **मान्य** विवेचन नहीं है, क्योंकि यदि AB = AC है, तो $\angle B = \angle C$ को सिद्ध करने के लिए,पहले $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ सिद्ध किया जाता है। अत: $\Delta ABD \cong \Delta ACD$ सिद्ध करने के लिए, $\angle B = \angle C$ का प्रयोग करना सही नहीं है।



(ii) सिद्ध कीजिए कि किसी समांतर चतुर्भुज का विकर्ण उसे दो सर्वांगसम त्रिभुजों में विभाजित करता है।

सम्भावित उपपति: ABCD एक समांतर चतुर्भुज है तथा AC उसका एक विकर्ण है।

अब, ΔABC और ΔCDA में,



AB = CD (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

BC = DA (समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ)

AC = CA (उभयनिष्ठ)

अत:, $\Delta ABC \cong \Delta CDA$(SSS कसौटी)

यह भी मान्य विवेचन नहीं है, क्योंकि "समांतर चतुर्भुज की सम्मुख भुजाएँ बराबर होती है" सिद्ध करने के लिए, पहले $\Delta ABC \cong \Delta CDA$ सिद्ध किया जाता है तथा फिर CPCT के रूप में निष्कर्ष निकाला जाता है कि AB = CD और BC = DA है।

(iii) एक त्रिभुज में, यदि एक भुजा के समांतर अन्य दो भुजाओं को प्रतिच्छेद करने के लिए रेखा खींची जाए, तो अन्य दो भुजाएँ एक ही अनुपात में विभाजित हो जाती हैं (BPT)।

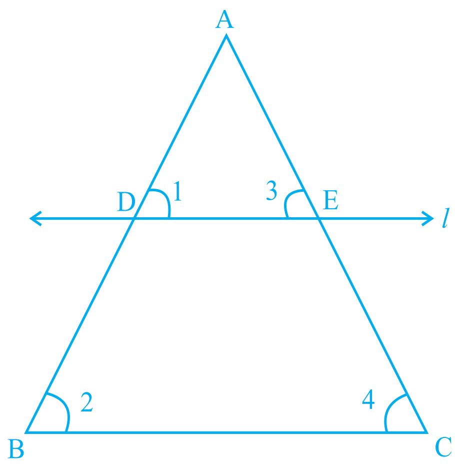
सम्भावित उपपति: मान लीजिए कि ABC एक त्रिभुज है जिसमें *l* || BC भुजाओं AB और AC को क्रमशः D और E पर प्रतिच्छेद करती है। हमें $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{EC}$ सिद्ध करना है।

DE || BC

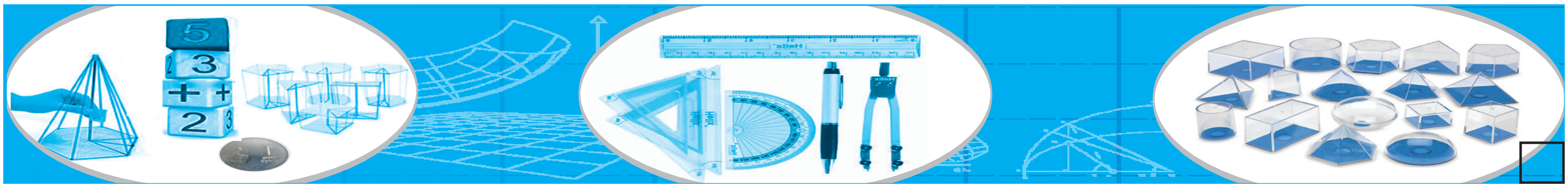
अत:, $\angle 1 = \angle 2$ (संगत कोण)

तथा $\angle 3 = \angle 4$ (संगत कोण)

अत:, $\Delta ABC \sim \Delta ADE$ (AA समरूपता कसौटी)



इसलिए, $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ (भुजाएँ समानुपाती हैं)



या, $\frac{AB}{AD} - 1 = \frac{AC}{AE} - 1$

या, $\frac{AB - AD}{AD} = \frac{AC - AE}{AE}$

या, $\frac{BD}{AD} = \frac{CE}{AE}$

अर्थात्, $\frac{AD}{BD} = \frac{AE}{CE}$, अत: सिद्ध किया गया।

यह एक मान्य विवेचन नहीं है, क्योंकि व्यापक रूप में, बहुभुजों की समरूपता के लिए, निम्नलिखित दो प्रतिबंध आवश्यक हैं:

(i) संगत कोण बराबर हैं।

(ii) संगत भुजाएँ समानुपाती हैं।

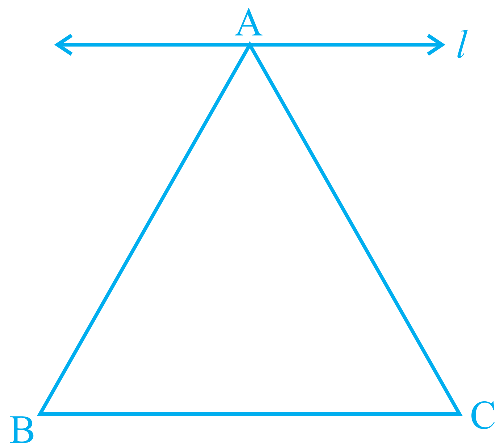
दो त्रिभुजों की समरूपता की स्थिति में, एक प्रतिबंध से दूसरा प्रतिबंध स्वत: प्राप्त हो जाता है, जिसे (BPT) या उसके विलोम की उपप्रमेय से सिद्ध किया जा चुका है। इसलिए, उपरोक्त परिणाम को जो आधारभूत समानुपातिक प्रमेय (BPT) ही है, AAA समरूपता कसौटी का प्रयोग करते हुए सिद्ध करना सही नहीं है।

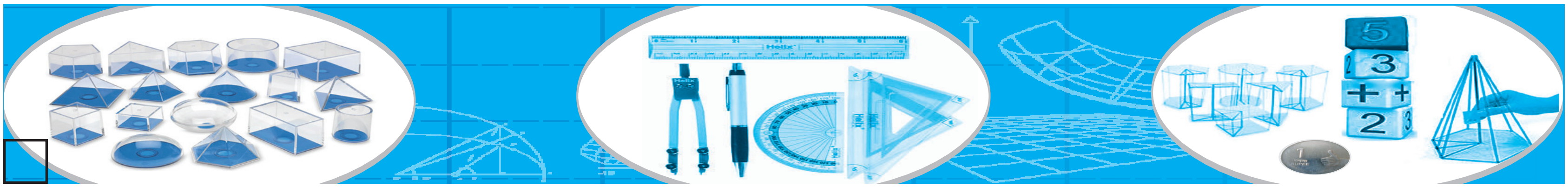
उपरोक्त तीनों उदाहरणों में दर्शाए गए विवेचन (तर्कण) को **वृत्तीय विवेचन** कहा जाता है, जो ज्यामिति में बहुत सामान्य रूप से मिलता है। शिक्षक इस प्रकार के विवेचन को अपने शिक्षण – अधिगम में ध्यानपूर्वक देख सकते हैं तथा अपने इन अनुभवों को अपने साथियों और मित्रों के साथ बाँट सकते हैं। इससे व्यापक रूप में गणित के तथा विशिष्ट रूप में ज्यामिति के अध्ययन में विवेकपूर्ण सुधार आएगा।

वृत्तीय परिभाषा: वृत्तीय विवेचन की तरह, ज्यामिति में वृत्तीय परिभाषाएँ भी देखने को मिल सकती हैं, जैसे कि नीचे दी हैं:

(i) **समकोण:** यदि किसी कोण को बनाने वाली दोनों किरण परस्पर लंब हों, तो वह कोण समकोण कहलाता है।

(ii) **लंब:** दो किरणें या रेखाएँ, परस्पर लंब कही जाती है, यदि वे एक समकोण बनाती हैं।





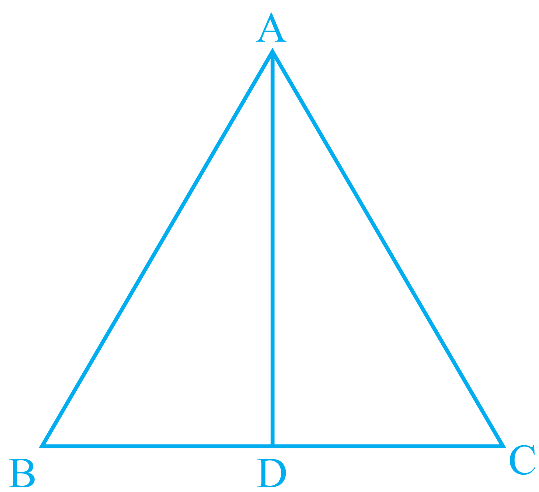
3.6 आकलन तकनीक

व्यापक रूप में गणित तथा विशिष्ट रूप से ज्यामिति एक अनुक्रमीय विषय है। उदाहरणार्थ, रेखाओं और कोणों जैसी आधारभूत अवधारणाओं के पक्के ज्ञान के बिना विद्यार्थी त्रिभुजों और त्रिभुजों की सर्वांगसमता की ओर नहीं बढ़ सकते। इसी प्रकार, त्रिभुजों की सर्वांगसमता की उचित समझ के बिना, त्रिभुजों की समरूपता और वृत्तों पर नहीं पहुँचा जा सकता है। इसलिए, विद्यार्थियों का आकलन (मूल्य आकलन या मूल्यांकन, सतत् और विस्तृत (या संपूर्ण) होना चाहिए। इसी कारण, यह आवश्यक है कि एक या दो अवधारणाओं के शिक्षण के बाद, नई अवधारणाओं पर जाने से पहले, विद्यार्थियों का आकलन कर लिया जाना चाहिए। क्योंकि ज्यामिति में, मुख्यत: शिक्षण – अधिगम प्रमेयों, प्रश्नों और रचनाओं का ही होगा, इसलिए उनका स्वंय शिक्षण – अधिगम प्रक्रिया के दौरान ही आकलन किया जाना चाहिए। शिक्षक को चाहिए कि वह विद्यार्थियों को प्रोत्साहित करने का प्रयास करे कि वे उनके द्वारा समस्याएँ हल करने में संबंद्धित छोटे से छोटे बिन्दु को भी लिखें। विभिन्न परिणामों की उपपति लिखते समय विशेष ध्यान रखना चाहिए। आकलन के लिए, समस्याओं या प्रश्नों का चुनाव उचित प्रकार से किया जाना चाहिए तथा इस आकलन के आधार पर मिली जानकारी के अनुसार, विद्यार्थियों को उपयुक्त निदानत्मक शिक्षण प्रदान किया जाना चाहिए। कुछ सरल समस्याएँ नीचे सुझाई जा रही है:

3.7 प्रश्नावली

1. यह सिद्ध करने के लिए कि एक त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180^0 होता है, हम एक रेखा मान लीजिए l, A से होकर ΔABC की भुजा BC के समांतर खींचते हैं (देखिए आकृति)। किस आधार पर आपको इस रेखा को खींचने की अनुमति है?

2. एक त्रिभुज ABC, जिसमें AB = AC है, यह सिद्ध करने के लिए कि $\angle$B = $\angle$C है, हम $\angle$A का समद्विभाजक खींचते



हैं, जो BC को D पर मिलता है। आप किस आधार पर यह कल्पना कर लेते हैं कि यह समद्विभाजक BC को एक और केवल एक ही बिन्दु D पर प्रतिच्छेद करेगा?

3. एक रेखा को उस पर स्थित किन्हीं दो बिन्दुओं को लेकर निरूपित किया जा सकता है। क्या आप इसका कारण बता सकते हैं?

4

क्षेत्रमिति का शिक्षण

4.1 भूमिका

क्षेत्रमिति एक लैटिन शब्द है जिसका अर्थ मापन होता है। क्षेत्रमिति में हम विभिन्न प्रकार की आकृतियों के परिमापों, (क्षेत्रफलों) और आयतनों का मापन करते हैं। क्षेत्रमिति का प्रारम्भ खेती से संबंधित भूमि के मापन की आवश्यकता से उत्पन्न हुआ। इसका अध्ययन पुरानी सभ्यताओं जैसे कि मिश्र, यूनान, बेबीलोनिया, चीन, भारत इत्यादि ज्यामिति के एक विशेष आग के रूप में विभिन्न रूपों में हुआ। जब कभी भी शासकों द्वारा नहरों, पिरामिडों, महलों स्मृति चिन्हों इत्यादि का निर्माण हुआ तब विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों के परिमापों, क्षेत्रफलों और आयतनों के परिकलन की आवश्यकता पड़ी।

आजकल क्षेत्रमिति जीवन के प्रत्येक भाग से इस सीमा तक संबंधित है कि बिना इसके ज्ञान के जीवन–यापन की कल्पना नहीं कर सकते हैं। गाँव में 'लेखपाल' इस ज्ञान को विभिन्न प्रकार के खेतों के क्षेत्रफलों के परिकलनों में करते हैं तथा किसानों को उनके खेतों के क्षेत्रफलों से संबंधित पासबुक जारी करते हैं। इसकी सहायता से किसान खेतों में पड़ने वाली खाद और बीज़ की राशियों आदि का आकलन करते हैं। इंजीनियर और आर्किटेक्ट भवनों की विमाओं के ज्ञान से इसके निर्माण में लगने वाली लागत का परिकलन करते हैं। क्षेत्रमिति के ज्ञान की आवश्यकता विभिन्न औद्योगिक वस्तुओं जैसे कि कपड़े, बर्तन, अलमारियों, साफ्टड्रिंक, पेट्रोलियम से संबंधित उत्पादों के निर्माण में होती है।

4.2 सामान्य युक्तियाँ

1. स्थूल वस्तुओं के उपयोग से समतलीय आकृतियों के क्षेत्रफलों की संकल्पना की व्याख्या करना।
2. स्थूल वस्तुओं तथा रफ चित्रों द्वारा ठोसों के आयतनों की संकल्पना की व्याख्या करना।
3. लकड़ी या मिट्टी के विभिन्न मॉडलों के उपयोग से ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल एवं वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल की संकल्पनाओं की व्याख्या करना।
4. शिक्षण – अधिगम के अंतर्गत आगमनिक और निगमनिक विधियों का प्रयोग।
5. समस्या हल हेतु वैकल्पिक विधियों का विकास करना।

4.3 मुख्य संकल्पनाएँ

- हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल।
- घन और घनाभ के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन।
- लंब वृत्तीय बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन।
- लंब वृत्तीय शंकु के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन।

- गोले का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन।
- ठोसों के संयोजन से बने ठोस के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन।
- शंकु के छिन्नक के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन।

4.4 शिक्षण युक्तियाँ

अब हम उपरोक्त सूची से कुछ संकल्पनाओं को लेते हैं तथा कक्षा में इन्हें पढ़ाये जाने के तरीके पर विचार करते हैं:

i. हीरोन के सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल

ii. लंब वृत्तीय बेलन और शंकु

iii. ठोसों के संयोजन से बने ठोस के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

iv. शंकु के छिन्नक के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

(i) हीरोन का सूत्र

शिक्षक कक्षा में प्रवेश करता है और निम्नलिखित तरह से चर्चा प्रारंभ करता है:

T: क्या आप जानते है कि त्रिभुज का क्षेत्रफल कैसे ज्ञात किया जाता है?

S: सर! हम सूत्र $\frac{1}{2}$ (आधार) × (शीर्ष लंब या ऊँचाई) का उपयोग कर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

T: ठीक है। मान लीजिए कि आप त्रिभुज की ऊँचाई के स्थान पर मात्र त्रिभुज की भुजाएँ जानते हो, तो आप क्या करेंगे?

S: हम त्रिभुज की आकृति खींचेंगे और इसकी ऊँचाई निकाल कर सूत्र का उपयोग कर क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयत्न करेंगे।

T: त्रिभुज की भुजाएँ 5, 6 और 7 इकाई दी हुई हैं। 7 इकाई आधार भुजा के संगत ऊँचाई ज्ञात कर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

S_1: सर! हम ऊँचाई $AD = p$ और $BD = x$ लेते हैं।

S_2: इसलिए, $DC = 7 - x$

T: अब, x और p में संबंध ज्ञात कीजिए।

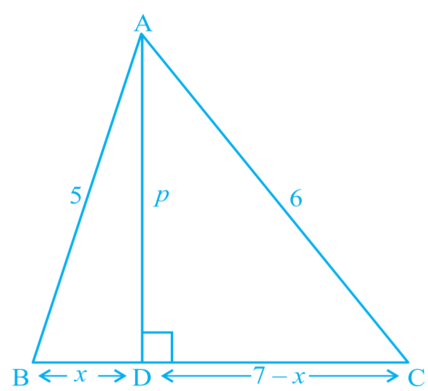
S_1: चूँकि ΔADB समकोण त्रिभुज है, अत:

पाइथागोरस प्रमेय से,

$$p^2 + x^2 = 25$$

S_2: ADC भी समकोण त्रिभुज है। अत:

$$p^2 + (7 - x)^2 = 36$$

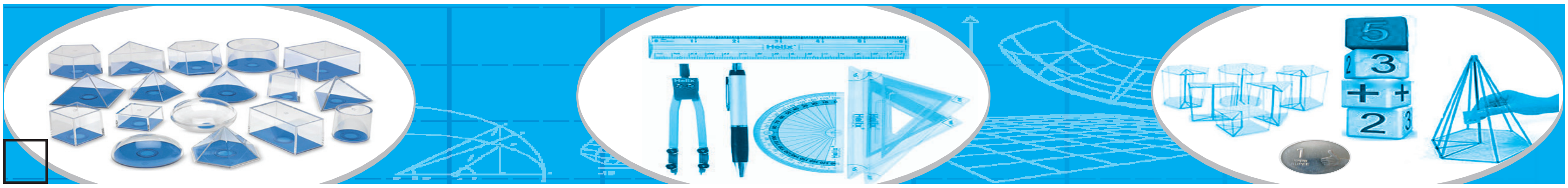


आकृति-1

T: p^2 के मानों को बराबर कीजिए। आप क्या पाते है?

S: $p^2 = 25 - x^2 = 36 - (7 - x)^2$

$$25 - x^2 = 36 - 49 + 14x - x^2$$



या, $14x = 38$

या , $x = \frac{19}{7}$

T: अब p का मान परिकलित कीजिए।

S: $p^2 = 25 - \frac{361}{49} = \frac{1225 - 361}{49} = \frac{864}{49} = \frac{6 \times 6 \times 6 \times 4}{49}$

या, $p = \frac{12}{7}\sqrt{6}$

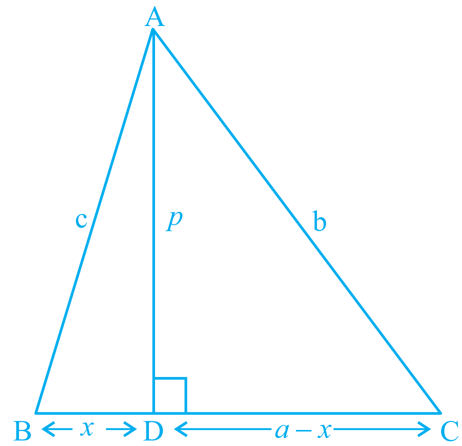
T: अब सूत्र द्वारा त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ______(1)

S: त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार × ऊँचाई

$= \frac{1}{2} \times 7 \times \frac{12}{7}\sqrt{6} = 6\sqrt{6}$ वर्ग इकाई

T: बहुत अच्छा ____________________________(1)

T: अब उस त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसकी भुजाएँ a, b और c इकाइयाँ हैं।



आकृति-2

S_1: मान लीजिए $AD = p$ और $BD = x$ जैसे कि आकृति -2 में दर्शाया गया है।

S_2: $DC = a - x$

T: अब, कैसे आरम्भ करोगे?

S_1: सर; ADB एक समकोण त्रिभुज है।

अत:, $p^2 + x^2 = c^2$

T: तब आगे कैसे?

S_2: सर! ADC भी एक समकोण त्रिभुज है। अत:

$p^2 + (a - x)^2 = b^2$

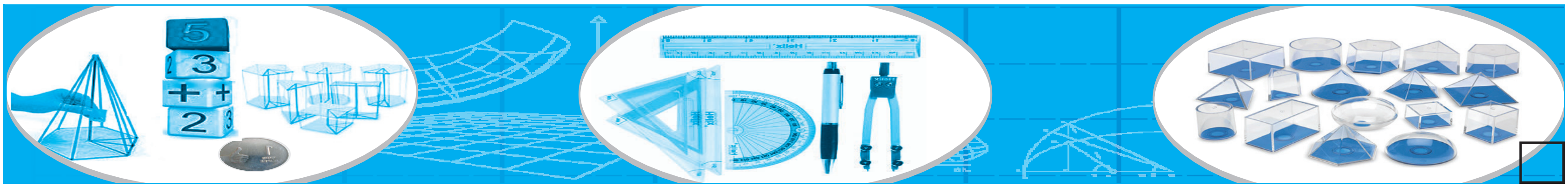
T: क्या अब आप x का मान ज्ञात कर सकते हैं?

S: सर! p^2 के दोनों मानों का को बराबर करने पर हम प्राप्त करते हैं कि

$b^2 - (a - x)^2 = c^2 - x^2$

इससे $x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$ प्राप्त होता है।

T: ठीक है। अब p का मान ज्ञात कीजिए।



S: $p=\sqrt{c^2-x^2}=\sqrt{c^2-\left(\frac{c^2+a^2-b^2}{2a}\right)^2}$

T: $2s = a + b + c$ का प्रयोग कर इसे सरलीकृत करने का प्रयत्न कीजिए___(1)

S: सर! $p=\sqrt{\frac{(2ac)^2-(c^2+a^2-b^2)^2}{(2a)^2}}$

$$=\frac{1}{2a}\sqrt{(2ac+c^2+a^2-b^2)(2ac-c^2-a^2+b^2)}$$

$$=\frac{1}{2a}\sqrt{\left[(c+a)^2-b^2\right]\left[b^2-(c-a)^2\right]}$$

$$=\frac{1}{2a}\sqrt{(c+a+b)(c+a-b)(b+c-a)(b-c+a)}$$

$$=\frac{1}{2a}\sqrt{2s(2s-2b)(2s-2a)(2s-2c)}$$

$$=\frac{2}{a}\sqrt{s(s-b)(s-a)(s-c)}$$

T: अब सूत्र, क्षेत्रफल = $\frac{1}{2}$ × आधार × ऊँचाई, का प्रयोग कर त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

S: सर! , ΔABC का क्षेत्रफल

$$=\frac{1}{2}\times a\times p$$

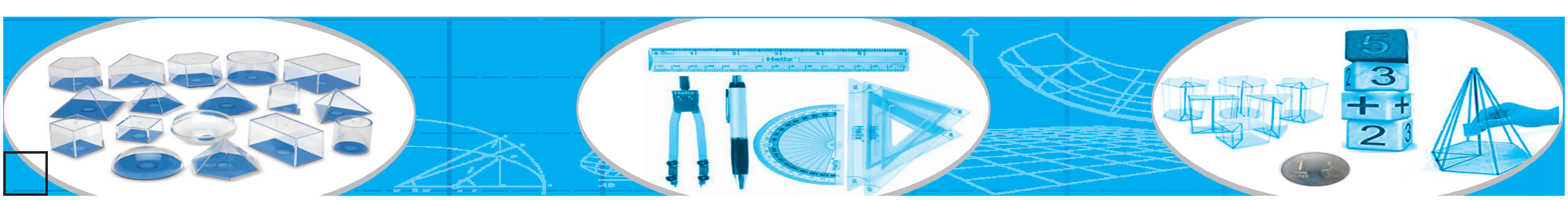
$$=\frac{1}{2}\times a\times\frac{2}{a}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

T: अच्छा। यह सूत्र **हीरोन के सूत्र** के रूप में जाना जाता है। इस प्रकार, यदि किसी त्रिभुज की भुजाएँ a, b और c हैं, तो क्षेत्रफल

$=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ होता है, जहाँ $s=\frac{a+b+c}{2}$ है।

T: अब यदि त्रिभुज की भुजाएँ 5, 6 और 7 इकाई हैं, तो हीरोन के सूत्र का प्रयोग करके त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।



S_1: सर! यहाँ $s = \dfrac{5+6+7}{2} = 9$ है।

S_2: त्रिभुज का क्षेत्रफल $= \sqrt{9\times(9-5)\times(9-6)\times(9-7)}$

$= \sqrt{9\times 4\times 3\times 2} = 6\sqrt{6}$ वर्ग इकाई

T: इसलिए आप देखते हैं कि दोनों स्थितियों में क्षेत्रफल एक समान आता है।

क्या आप जानते हैं?

चक्रीय चतुर्भुज जिसकी भुजाएँ a, b, c और d हैं, इसका भी क्षेत्रफल हीरोन सूत्र जैसा ही है।

क्षेत्रफल $= \sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, जहाँ $2s = a+b+c+d$ है।

पुनरावलोकन प्रश्न

1. उस समद्विबाहु त्रिभुज जिसकी समान भुजाएँ a तथा ऊँचाई h हैं, के क्षेत्रफल के लिए सूत्र लिखिए।
2. भुजा a वाले समबाहु त्रिभुज के लिए क्षेत्रफल का सूत्र लिखिए।

(ii) लंब वृत्तीय बेलन और शंकु

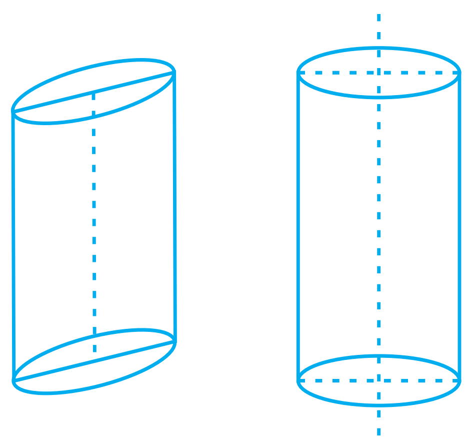
T: अच्छा, आकृति 3 को देखो, जिसमें दो बेलन श्यामपट्ट पर खींचे गए हैं। इन दोनों में क्या अंतर है?

S: आकृति 3(i) में बेलन का अक्ष आधार पर लंबवत नहीं है, जबकि आकृति 3(ii) में अक्ष आधार के लंबवत है।

T: आकृति 3(iii) में बेलन, लंब वृत्तीय बेलन कहलाता है, परन्तु आकृति 3(i) में बेलन लंब वृत्तीय नहीं है।

S: सर; क्या यह आवश्यक है कि बेलन का आधार सदैव वृत्तीय हो?

T: नहीं, यह दीर्घ वृत्तीय हो सकता है या किसी वक्र से घिरा हुआ हो सकता है (परन्तु ऐसे बेलनों के आयतन या पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करना आसान नहीं होगा। क्या आपको लंब वृत्तीय बेलन के आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने हेतु सूत्र याद है, जब इसका अर्धव्यास r और ऊँचाई h है?)



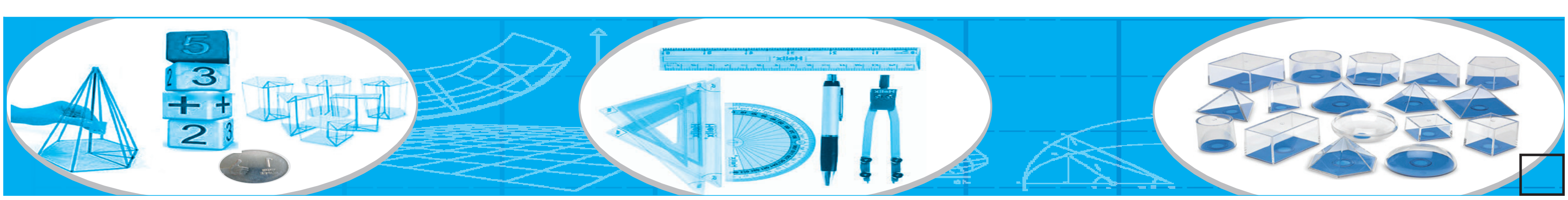
(i) (ii)

आकृति- 3

S: सर! पाठ्यपुस्तक में ये दिए गए हैं: लंब वृत्तीय बेलन का

आयतन $= \pi r^2 h$, और वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh$

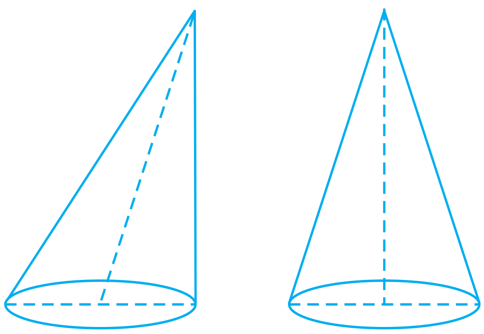
तथा संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi r(h + r)$



T: बेलन की तरह, शंकु भी दो प्रकार के हो सकते हैं। श्यामपट्ट पर खींची गई आकृति 4 देखें।

आकृति से क्या आप बता सकते हैं कि कौन लंब वृत्तीय शंकु है?

S: सर!, आकृति 4(ii) में शंकु लंबवृत्तीय शंकु है, क्योंकि अक्ष आधार के लंबवत है।



(i) (ii)

आकृति- 4

पुनरावलोकन प्रश्न

किस तरह, एक लंब वृत्तीय बेलन एक अन्य बेलन से भिन्न है?

(iii) दो ठोसों के संयोजन से बने ठोस के पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन

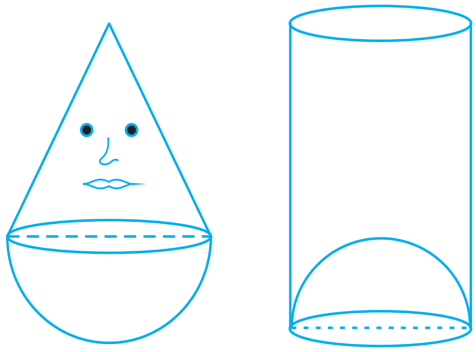
T: आपने आकृति 5(i) की तरह खिलौना और आकृति 5(ii) की तरह ठोस वस्तुएँ अवश्य देखी होगी।

क्या आप बता सकते हैं कि ये ठोस क्या हैं?

S: सर! आकृति 5(i) में आधार अर्धगोला है, जबकि इसका ऊपरी भाग एक शंकु है।

S_2: आकृति 5(ii) एक बेलन की तरह है, जिसमें से एक अर्धगोला बाहर निकाल लिया गया है।

T: बिलकुल ठीक। आज हम देखेंगे कि कैसे दो ज्ञात ठोसों के संयोजन से बने ठोस का आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल प्राप्त किया जा सकता हैं।



(i) (ii)

आकृति- 5

S: सर! मैं दोनों स्थितियों में आयतन ज्ञात कर सकता हूँ।

T: कैसे?

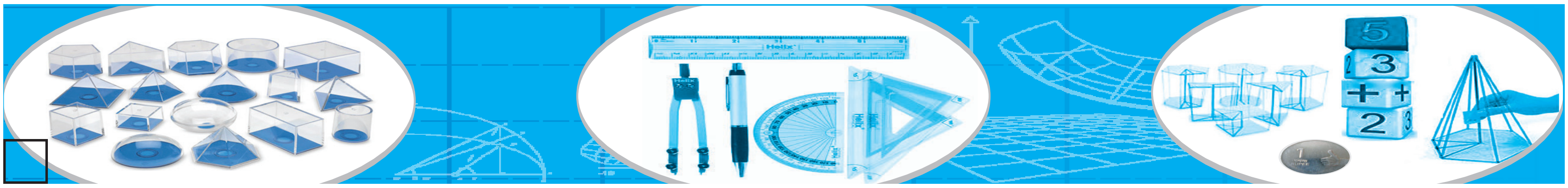
S: यदि दो ठोसों का आयतन V_1 और V_2 हो और वे एक साथ जोड़े जाते हों, तो इसका आयतन V_1+V_2 होगा। यदि आयतन V_1 का एक ठोस एक अन्य आयतन V_2 के ठोस में से निकाल लें, तो शेष ठोस का आयतन $V_2 - V_1$ होगा।

T: अच्छा।

S: क्या ऐसा ही परिणाम पृष्ठीय क्षेत्रफल के संदर्भ में भी सत्य होगा?

T: आकृति 5(i) का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने का प्रयत्न कीजिए, यदि अर्धगोले या शंकु का अर्धव्यास r है तथा शंकु की ऊँचाई h है।

S_1: शंकु का पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi r\left(\sqrt{h^2+r^2}+r\right)$ (आकृति 6(i))



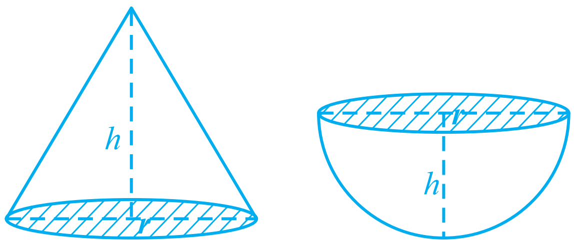
S$_2$: अर्धगोला का पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= 2\pi r^2 + \pi r^2 = 3\pi r^2$ [(आकृति 6(ii)

S$_3$: दोनों ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का योग

$= \pi r\left(\sqrt{h^2 + r^2} + r\right) + 3\pi r^2$

$= \pi r\left(\sqrt{h^2 + r^2} + 4r\right)$



(i) (ii)

आकृति- 6

S$_4$: सर!, आकृति 5(i) का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल (TSA) = $\pi r(\sqrt{h^2 + r^2} + 4r)$

T: क्या यह सही है?

S: नहीं सर!

S$_2$: [(आकृति 5(i)] में खिलौने का पृष्ठीय क्षेत्रफल = शंकु का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल (CSA)+ अर्धगोले का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$= \pi r\left(\sqrt{h^2 + r^2}\right) + 2\pi r^2$

$= \pi r\left(\sqrt{h^2 + r^2} + 2r\right)$

T: बिल्कुल ठीक है। आपने क्या प्राप्त किया?

S: सर! संयोजित ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल दोनों ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग से कम है।

T: क्या आप ज्ञात कर सकते हैं कि यह कैसे हुआ?

S: सर! शंकु के आधार का क्षेत्रफल πr^2 और अर्द्धगोले के आधार का क्षेत्रफल πr^2 एक दूसरे को ढक लेते हैं जो दिखाई नहीं पड़ते हैं। अत: इन क्षेत्रफलों का योग खिलौने के पृष्ठीय क्षेत्रफल में सम्मिलित नहीं है।

T: अब यदि एक ठोस को एक अन्य ठोस से निकाल लिया जाता है, तो क्या आप शेष ठोस के पृष्ठीय क्षेत्रफल का अनुमान लगा सकते हैं? क्या यह बढ़ेगा या घटेगा।

S$_1$: निश्चित रूप से यह घटेगा।

S$_2$: यह बढ़ भी सकता है।

T: आप दोनो सही हैं। यह विशेष स्थिति पर निर्भर करता है। कभी यह बढ़ता है और कभी यह घटता है।

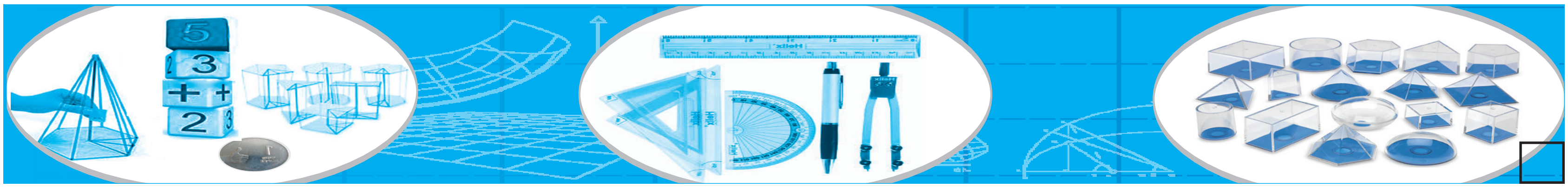
S: सर! इसे विस्तार से बताइए। यह हम लोगों को स्पष्ट नहीं है।

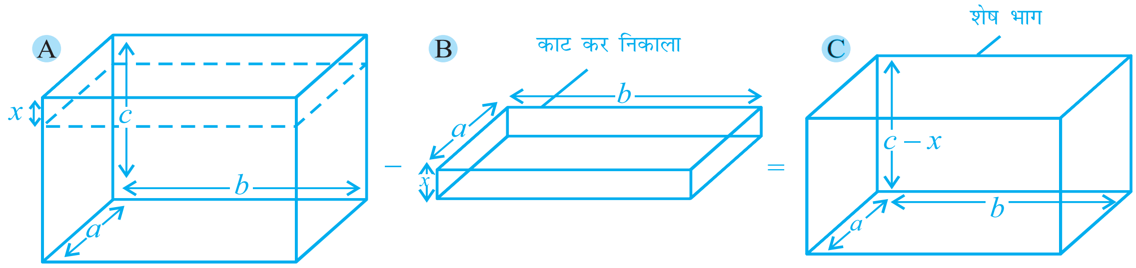
T: सर्वप्रथम, हम उस स्थिति को लें जब यह घटता है। श्यामपट्ट पर खींची आकृति देखें (आकृति 7)

T: ठोस A का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है?

S: यह $2(ab + bc + ac)$ है।

T: ठोस C का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है, जो ठोस का शेष भाग है?



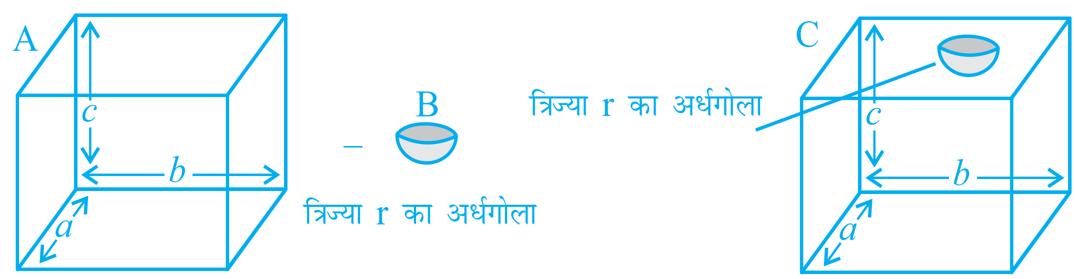


आकृति- 7

S: यह $2[ab + a(c - x) + b(c - x)]$

$= 2\,(ab + bc + ac) - 2x(a + b)$

T: अत:, यह ठोस A के पृष्ठीय क्षेत्रफल से कम है। अब, हम उस स्थिति को लेते हैं जब ठोस को काटने पर पृष्ठीय क्षेत्रफल बढ़ता है। श्यामपट्ट पर खींची गई आकृति 8 को देखें। यहाँ एक घनाभ के एक फलक में एक अर्धगोलीय छिद्र बनाया जाता है।



आकृति- 8

T: ठोस A का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है?

S: पुन: यह $2(ab + bc + ac)$ है।

T: ठोस C का पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या है, जब एक त्रिज्या r का अर्धगोलीय छिद्र बना दिया जाता है?

S_1: यह $2(ab + bc + ac) + 2\pi r^2$ है।

T: यह सही नहीं है। क्या कोई इसे सही कर सकता है?

S_2: सर! यह

$2(ab + bc + ac) + 2\pi r^2 - \pi r^2$

$= 2(ab + bc + ac) + \pi r^2$ है।

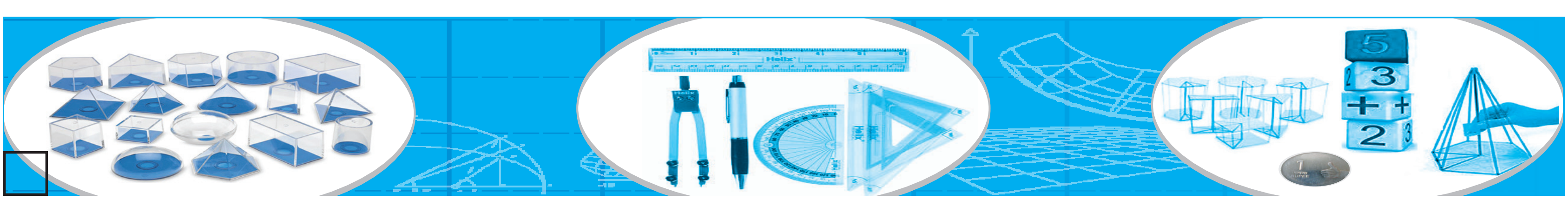
T: ठीक है। अत:, आप देखते है कि दिए गए ठोस से एक ठोस काट कर बाहर निकालने पर पृष्ठीय क्षेत्रफल बढ़ जाता है।

पुनरावलोकन प्रश्न

1. ठोसों के संयोजन से बने ठोस के एक या दो उदाहरण दीजिए:

   (i) जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल के योग से अधिक हो। जिनके संयोजन से ठोस बना हो।

   (ii) जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल के योग से कम हो जिनके संयोजन से ठोस बना हो।



(iii) जिसका पृष्ठीय क्षेत्रफल ठोसो के पृष्ठीय क्षेत्रफलों के योग के बराबर हो, जिससे ठोस बना हो।

iv शंकु का छिन्नक

T: आकृति 9(i) में दिए गए ठोस पर विचार करें जो पानी – पीने के गिलास जैसा है।

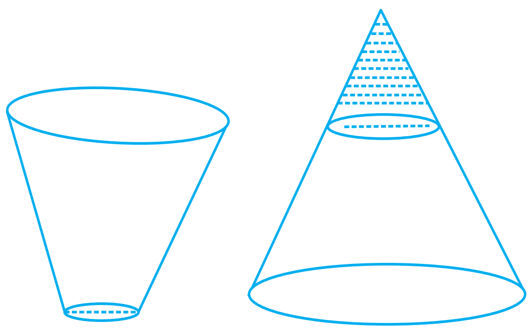
जैसा कि आप जानते हैं यह आकृति तब पाई जाती है, जब एक छोटा शंकु बड़े शंकु से काट लिया जाता है।

S: सर! इस आकृति का क्या नाम है?

T: इसे शंकु का छिन्नक कहते हैं।

S: मान लीजिए हम शंकु से एक टुकडा काट लेते हैं, जैसे कि आकृति

[(आकृति 9(ii)] में दर्शाया गया है। क्या यह भी छिन्नक होगा?



(i) (ii)

आकृति- 9

T: नहीं। कटे भाग का आधार दिए गए शंकु के आधार के समांतर होना चाहिए तभी यह छिन्नक होगा।

आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने हेतु, हमें केवल लंब वृत्तीय शंकु के छिन्नक पर ही विचार करना चाहिए।

T: क्या आप छिन्नक के आयतन और पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए सूत्रों के बारे में जानते हैं? [आकृति 10 का अछायांकित भाग]

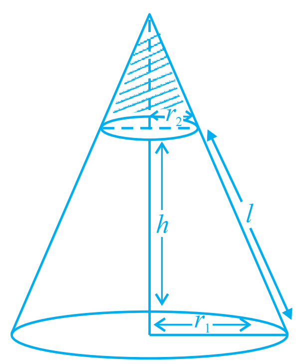
S: सर! पाठ्यपुस्तक में निम्नलिखित सूत्र दिए गए हैं:-

आयतन $= \frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2\right)$

वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l\left(r_1 + r_2\right)$

संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \pi l\left(r_1 + r_2\right) + \pi r_1^2 + \pi r_2^2$

जहाँ r_1, r_2 छिन्नक के सिरों की त्रिज्याएँ हैं, h ऊँचाई है और l शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई है।



आकृति- 10

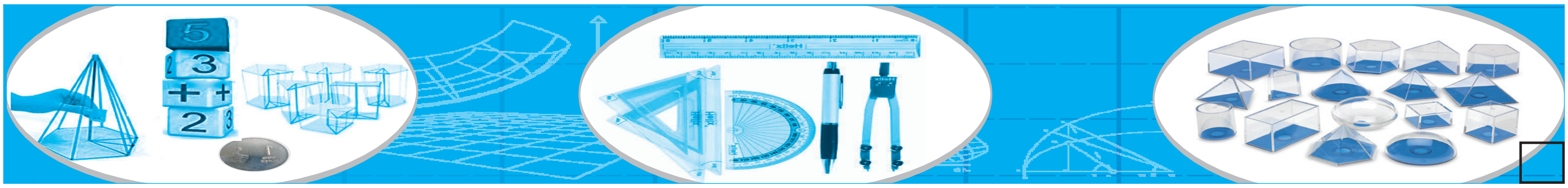
S: सर!? ये सूत्र हम कैसे निकाल सकते है?

T: आपको समरूप त्रिभुजों के गुणों की जानकारी होगी। ये जानकारी, इन सूत्रों के निकालने में प्रयुक्त होगी।

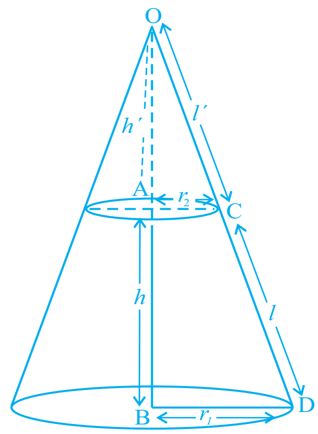
मान लीजिए कि छिन्नक की ऊँचाई AB, h है तथा इसके सिरों की त्रिज्याएँ r_1, r_2 हैं तथा तिर्यक ऊँचाई CD= l है।

शंकु पूरा करें। मान लीजिए O इसका शीर्ष है, OA=h^1 और OC= l^1 है (आकृति 11 देखें)

अब, ΔOBD समरूप है ΔOBD के। तब आप क्या प्राप्त करेंगे?



S: $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{AC}{BD}=\dfrac{OC}{OD}$ या $\dfrac{h'}{h'+h}=\dfrac{r_2}{r_1}=\dfrac{l'}{l+l'}$



आकृति- 11

T: h' और l' के मान क्या है?

S: सर, $h'=\dfrac{r_2}{r_1-r_2}h$ और $l'=\dfrac{r_2}{r_1-r_2}l$

T: अब, छिन्नक का आयतन = बड़े शंकु का आयतन – छोटे शंकु का आयतन।

याद कीजिए कि शंकु का आयतन = $\dfrac{1}{3}\pi$ (त्रिज्या $)^2\times$ ऊँचाई होता है।

अत:, छिन्नक का आयतन क्या होगा?

S: सर! छिन्नक का आयतन $=\dfrac{1}{3}\pi r_1^2\left(h'+h\right)-\dfrac{1}{3}\pi r_2^2 h'$

$$=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h+\frac{1}{3}\pi\left(r_1^2-r_2^2\right)h'$$

$$=\frac{1}{3}\pi r_1^2 h+\frac{1}{3}\pi\left(r_1^2-r_2^2\right)\frac{r_2}{r_1-r_2}h$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left[r_1^2+\left(r_1+r_2\right)r_2\right]$$

$$=\frac{1}{3}\pi h\left(r_1^2+r_1r_2+r_2^2\right)$$

T: अब, इसी तरह छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

S: छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $=\pi r_1\left(l'+l\right)-\pi r_2 l'$

$$=\pi r_1 l+\pi\left(r_1-r_2\right)l'$$

$$=\pi r_1 l+\pi\left(r_1-r_2\right)\frac{r_2}{r_1-r_2}l$$

$$=\pi\left(r_1+r_2\right)l$$

$$=\pi\left(r_1+r_2\right)l$$

T: संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल क्या होगा?

S: छिन्नक का संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल

पुनरावलोकन – प्रश्न

1. स्थूल वस्तुओं के दो उदाहरण दीजिए जिनके आकार शंकु के छिन्नक की तरह हों।
2. जैसे बेलन की वक्र पृष्ठ की कल्पना आयताकार शीट को मोड़ कर की जा सकती है उसी तरह किस तरह की शीट को मोड़ने पर शंकु का छिन्नक प्राप्त होगा?
3. यदि शीर्ष से शंकु के तिर्यक ऊँचाई को आधार के समांतर समतल द्वारा $\sqrt{2}+1:1$ के अनुपात में विभाजित किया जाता है, तो दर्शाइए कि इसका वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल दो बराबर भागों में विभाजित हो जाता है।

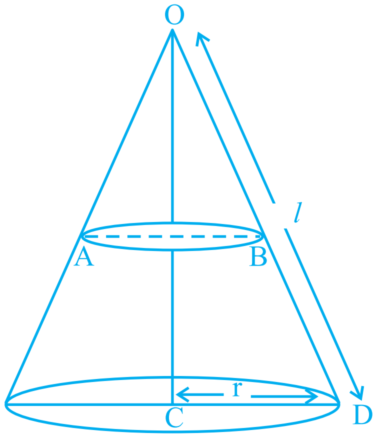
हल प्रश्न 3

मान लीजिए शंकु की त्रिज्या r तथा इसकी तिर्यक ऊँचाई l (=OD) (आकृति 12)है। तब,

$$OB=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+2}l=\frac{l}{\sqrt{2}} \quad \text{और} \quad AB=\frac{r}{\sqrt{2}}$$

छोटे शंकु का C.S.A $=\pi\times\frac{r}{\sqrt{2}}\times\frac{l}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\pi rl$

$=\frac{1}{2}$ संपूर्ण शंकु का C.S.A



आकृति- 12

विकल्पत:, छिन्नक का C.S.A

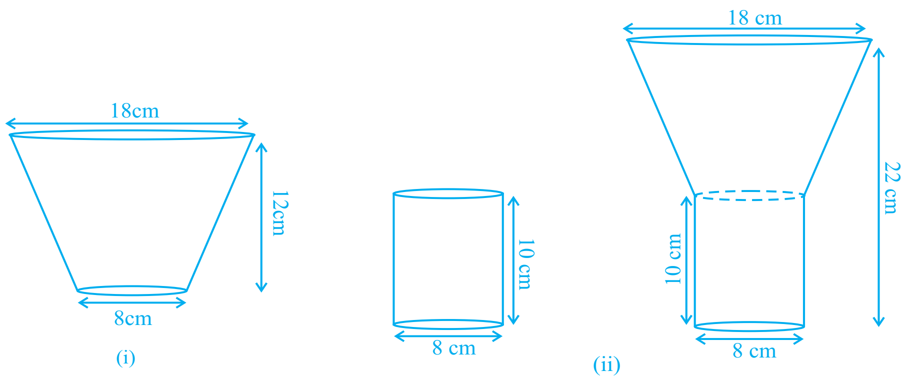
$$=\pi\left(l-\frac{l}{\sqrt{2}}\right)\left(r+\frac{r}{\sqrt{2}}\right)=\pi rl\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\pi rl$$

$\frac{1}{2}$ संपूर्ण शंकु का C.S.A

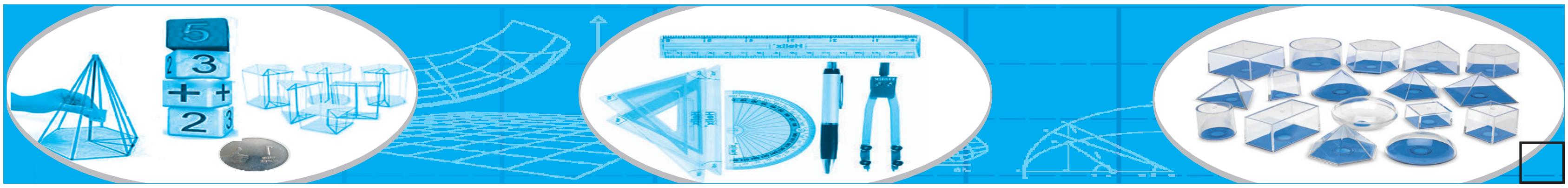
चलिए, एक उदाहरण लेते हैं।

उदाहरण: टिन शीट की बनी एक कीप है, जो शंकु के छिन्नक में एक बेलनाकार भाग को जोड़कर बनाई गई है। बेलनाकार भाग की लंबाई 10 cm है। यदि इसकी पूरी उँचाई 22 cm, बेलनाकार भाग का व्यास 8 cm और कीप के ऊपरी सिरे का व्यास 18 cm है, तो कीप को बनाने में प्रयुक्त टिन शीट का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए। (आकृति 13 देखें)

अध्यापक प्रश्न के संदर्भ में आकृति खींचता है।



आकृति- 13



S: सर!, जी, दोनों भागों को अलग – अलग खींचें।

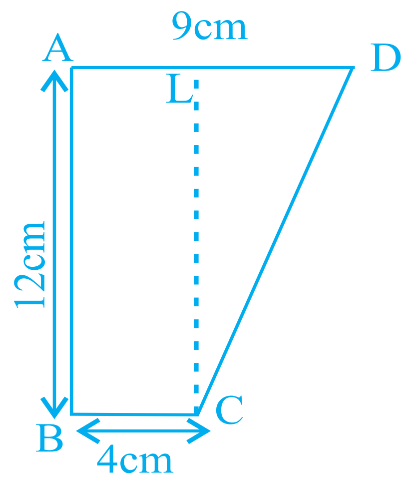
T: इन्हें आकृति 13 (i) और (ii) द्वारा दर्शाया जा सकता है।

टिन शीट का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए, आपको दोनों भागों के अलग – अलग से वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात करने होगें और फिर इन्हें जोड़ना पड़ेगा।

S: सर! शंकु के छिन्नक की तिर्यक ऊँचाई कैसे ज्ञात करें?

T: आकृति ABCD देखें, जिसे आकृति 14 में दर्शाया गया है।

यहाँ, AB दोनों फलकों के केन्द्रों को मिलाने वाला रेखाखंड है। CD तिर्यक ऊँचाई है। अत:, AD और BC दोनों फलकों की त्रिज्याएँ है। AD पर C से लंब CL खींचते है।



चित्र- 14

S: सर! ΔCLD समकोण त्रिभुज होगा, जिसमें CL=12cm, $LD = (9-4)cm = 5cm$ है।

अत:, $CD = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13cm$ है।

T: ठीक है। अब आप वाँछित क्षेत्रफल ज्ञात कर सकते हैं।

S: छिन्नक का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल

$$= \pi(r_1 + r_2)l = \frac{22}{7} \times (4+9) \times 13\text{cm}^2$$

बेलन का वक्र पृष्ठीय क्षेत्रफल $= 2\pi rh = 2 \times \frac{22}{7} \times 4 \times 10\text{cm}^2$

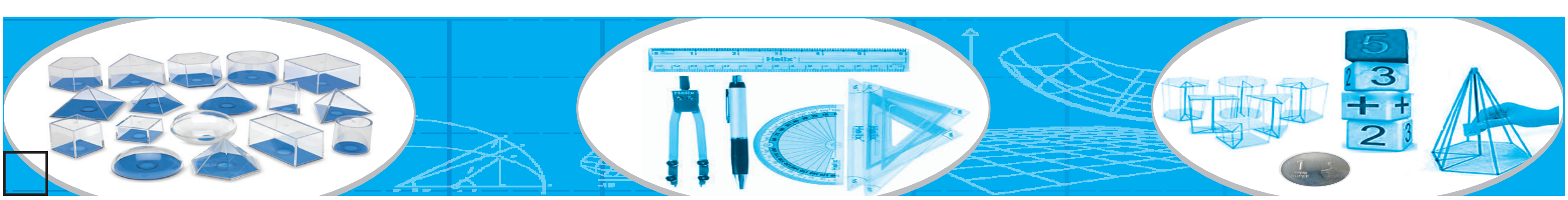
संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल $= \frac{22}{7} \times (169+80)\text{cm}^2 = \frac{22 \times 249}{7}\text{cm}^2$

$$= \frac{5478}{7}\text{cm}^2 = 782\frac{4}{7}\text{cm}^2$$

T: हाँ, आपको उत्तर प्राप्त हो गया।

4.5 भ्रान्तियाँ

1. पृष्ठीय क्षेत्रफल की इकाई को आयतन की इकाई जैसे लिया जाता है और विलोमत: भी।
2. एक ठोस को एक अन्य ठोस से बाहर निकालने पर शेष भाग का पृष्ठीय क्षेत्रफल दोनों ठोस के पृष्ठीय क्षेत्रफलों का अंतर लिया जाता है।
3. एक ठोस को अन्य ठोस के साथ जोड़ने पर जोड़ने से बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल लिए गए दोनों ठोसों के पृष्ठीय क्षेत्रफल के बराबर लिया जाता है।
4. बेलन और शंकु सदैव वृत्तीय आधार के साथ लंब वृत्तीय होते है।

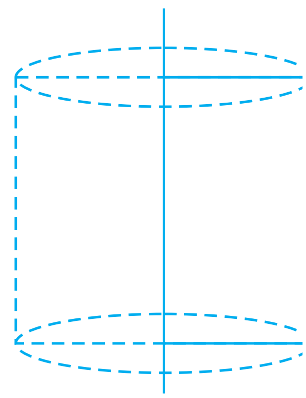


शिक्षकों के लिए कार्य

1. बेलन के पृष्ठीय क्षेत्रफल के आकलन की विधि का वर्णन करें तथा इसे वार्तालाप के रूप में लिखें।
2. $22\text{cm} \times 11\text{cm} \times 7\text{cm}$ विमाओं की ईंटों से 10cm लंबी, 22cm चौड़ी और 154cm ऊँची एक दीवार बनानी है। यदि ईंटों के जोड़ने में प्रयुक्त पदार्थ संपूर्ण आयतन का $\frac{1}{2}$ भाग घेर लेते हैं, तो कक्षा के विद्यार्थियों से परिचर्या द्वारा प्रयुक्त ईंटों की संख्या का आकलन करवाएँ।

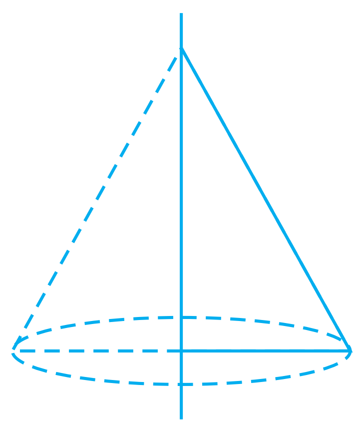
क्रियाकलाप

(1) मोटे पेपर की एक आयताकार शीट लीजिए। इसके किसी एक किनारे के अनुदिश पतली छड़ी चिपकाएँ। शीट को छड़ी के सापेक्ष एक पूरा चक्कर घुमाएँ। आप कैसा पृष्ठ प्राप्त करेंगे? यह एक लंब वृत्तीय बेलन होगा। (आकृति 15 देखें)



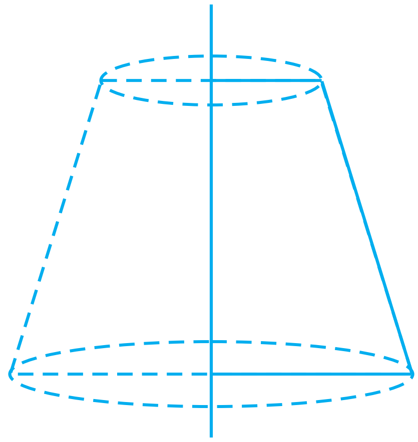
आकृति- 15

(2) समकोण त्रिभुज के आकार की एक मोटे पेपर की शीट लीजिए। इस त्रिभुज के किसी पैर के अनुदिश एक पतली छड़ी चिपकाएँ। शीट को छड़ी के सापेक्ष एक पूरा चक्कर घुमाएँ। इस तरह बना पृष्ठ एक लंब वृत्तीय शंकु होगा।



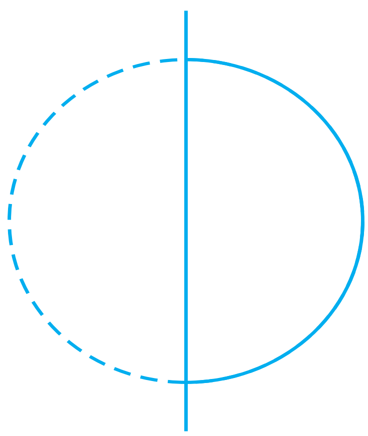
आकृति- 16

(3) समलंब के आकार की एक मोटे पेपर की शीट लीजिए,जिसकी एक असमांतर भुजा समांतर भुजा पर लंब है। इस भुजा के अनुदिश एक पतली छड़ी चिपकाएँ, शीट को छड़ी के सापेक्ष एक पूरा चक्कर घुमाएँ। इस तरह बना पृष्ठ शंकु का छिन्नक होगा। (आकृति 17 देखें)।



आकृति- 17

(4) अर्ध वृत्ताकार में मोटे पेपर की एक शीट लें। इसके व्यास के अनुदिश एक पतली छड़ी लगाएँ। इस शीट को पतली छड़ी के सापेक्ष एक पूरा चक्कर घुमाएँ। इस तरह बना पृष्ठ एक गोला होगा। (आकृति 18 देखें)।



आकृति- 18

प्रश्नावली

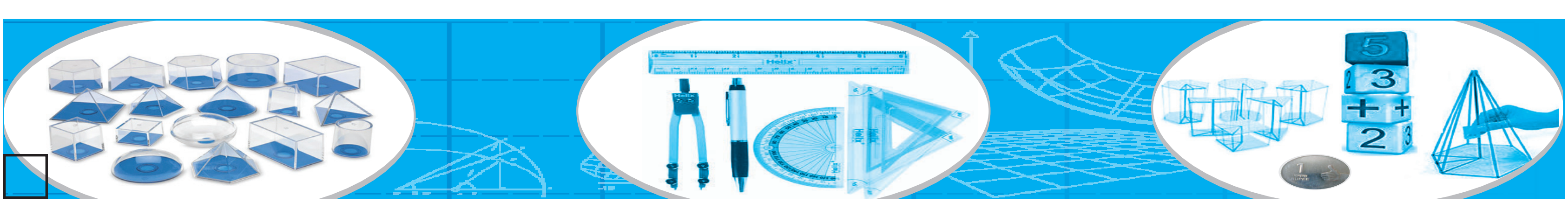
प्रश्न 1 और 2 में सही विकल्प पर निशान (✓)लगाएँ;

(1) यदि A_1 और A_2 छिन्नक के ऊपरी और निचली सिरों के क्षेत्रफल हों, तो इसका आयतन है:

(A) $\frac{h}{3}(A_1 + A_2)$ (B) $\frac{h}{3}\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_1A_2}$

(C) $\frac{h}{3}\left(A_1 + \sqrt{A_1A_2} + A_2\right)$ (D) $\frac{h}{3}\sqrt{A_1A_2}$

उत्तर – (C)



(2) यदि किसी त्रिभुज का क्षेत्रफल 24 cm^2 है और भुजाएँ 6 cm और 8 cm हैं, तब तीसरी भुजा है:

(A) 10 cm (B) 7 cm (C) $4\sqrt{3}$ cm (D) $\frac{48}{7}$ cm

उत्तर (A)

प्रश्नों 3 और 4 में सत्य या असत्य लिखें और अपने उत्तर का औचित्य लिखें।

(3) किसी त्रिभुज की भुजाएँ 13 cm, 14 cm और 15 cm हैं, आधार 14 cm के संगत त्रिभुज की ऊँचाई 12 cm है।

(सत्य)

(4) एक 4 cm त्रिज्या के शंकु को इसके आधार के समांतर शंकु की ऊँचाई के मध्य से होते हुए समतल द्वारा विभाजित किया जाता है। तब इन दोनों भागों के आयतनों का अनुपात 1:5 है।

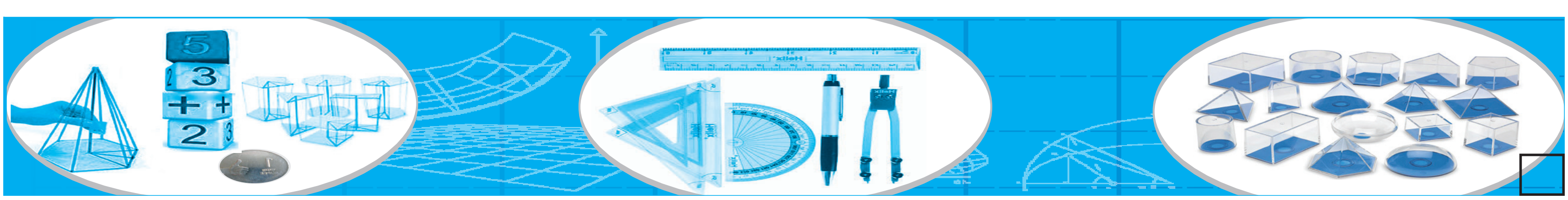
असत्य: अनुपात 1:7 है।

(5) त्रिभुज की दो भुजाओं की माप 17 cm और 21 cm हैं। यदि इसका क्षेत्रफल 84 cm^2 है, तो तीसरी भुजा ज्ञात कीजिए।

(10 cm या $4\sqrt{85}$cm)

(6) शंकु के छिन्नक के दोनों के वृत्तीय तलों के व्यास 8 cm और 16 cm हैं तो। यदि इसका संपूर्ण पृष्ठीय क्षेत्रफल 440 cm^2 है, तो इसकी ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

(उत्तर – 3 cm)



5

सांख्यिकी और प्रायिकता –शिक्षण

5.1 भूमिका :

दैनिक जीवन में हम समाचार पत्रों, दूरदर्शनों, पत्रिकाओं और अन्य संचार के माध्यमों से विभिन्न प्रकार के तथ्यों, अंकीय आँकड़ो, सारणियों और आरेखों को पाते हैं।

ये सूचनाएँ जीवन निर्वाह से संबधित मूल्यों, क्रिकेट औसतों, कम्पनी के लाभ/ हानि, तापमान और नगरों में वर्षा, पंचवर्षीय योजना के अंतर्गत विभिन्न विभागों में,मतदान परिणामों इत्यादि के संदर्भ में होती है।

निश्चित उद्देश्य से अंकीय या अन्य विवरण एकत्रित रूप में आँकड़े कहलाते हैं। आंकड़े किसी न किसी रूप में जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में प्रयुक्त होते हैं। अत: आवश्यक है कि इन आँकड़ो से किस तरह महत्वपूर्ण सूचना निकालें। सूचना का निष्कर्षण का अध्ययन गणित के जिस शाखा में किया जाता है वह सांख्यिकी कहलाती है।

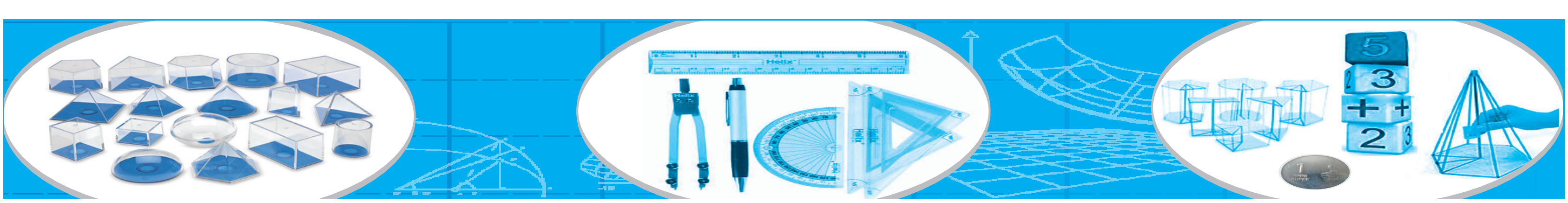
ऐसा प्रतीत होता है कि सांख्यिकी शब्द की उत्पत्ति लेटिन शब्द 'स्टेट्स' से हुई है जिसका तात्पर्य राजनैतिक राज्य है।

प्राचीन काल में सरकार देश की जनसंख्या, धन संपदा के विषय में आँकड़े एकत्र करती थी ताकि देश की मानव – शक्ति, नये कर तथा चन्दे, आगामी विकास योजना बनाने में प्रयुक्त हों।

भारत में आँकड़े एकत्र करने की प्रभावी प्रणाली 2000 वर्ष पूर्व चन्द्रगुप्त मौर्य के शासन काल में (324 – 300 ई. पूर्व) प्रचलित थी। कौटिल्य के अर्थशास्त्र से स्पष्ट होता है कि 300 ई. पूर्व से ही बहुत ही सुव्यवस्थित ढंग से जीवन और मृत्यु की पंजीकरण प्रथा प्रचलन में थी। अकबर के शासन काल (1556 – 1605) में राजा टोडरमल उस काल के भूमि और राजस्व मंत्री, जमीन तथा खेती से सबंधित लेखा – जोखा रखते थे। अकबर के नव रत्नों में से एक अबुल फजल (1596 -97) द्वारा लिखित पुस्तक 'आइना-ए-अकबरी' से उस काल में किए गए प्रशासनिक और सांख्यिकीय सर्वेक्षणों का विस्तृत विवरण प्राप्त होता है।

17वीं शताब्दी में जीव सबंधित सांख्यिकी के जनक कहालाने वाले कैप्टन जान ग्रांट (1620 – 1674) प्रथम व्यक्ति थे जिन्होंने जीवन और मृत्यु संबधित आँकड़ो का अध्ययन किया। मृत्यु दर सारणियों का परिकलन और विभिन्न स्तर की आयु पर जीवन- काल की संभावनाओं का आकलन से जीवन सुरक्षा योजनाओं का विचार आया।

समय गुजरने के साथ – साथ सांख्यिकी का विस्तार और बढ़ा और जीवन के प्रत्येक क्षेत्र जैसे आयात, निर्यात, विवाह तथा तलाक से संबधित अंकीय आँकड़े एकत्र किए जाने लगे तथा इनका सारणी और चित्रात्मक रूप में प्रस्तुतीकरण आरंभ



हुआ। उन्नसवीं सदी के अंत तक सांख्यिकी का विस्तार पुन: बढ़ा और इसके अंतर्गत आँकड़ो का एकत्रीकरण,व्यवस्थिती_ करण, प्रस्तुतीकरण और आँकड़ो की व्याख्या से महत्वपूर्ण निष्कर्ष निकालना सम्मिलित किया गया।

आजकल कमप्यूटर तीव्र गति से आँकड़ो को संशोधित करने में सहायक है। हमारा समाज सांख्यिकी का उपयोग झुकाव जानने तथा निर्णय लेने में करता है। अर्थशास्त्री आर्थिक झुकाव, मनोवैज्ञानिक बुद्धि की माप का विश्लेषण करते हैं। समाचारपत्र और दूरदर्शन किसी मुद्दे या समस्या पर राय प्रकट करते हैं। शिक्षाविद छात्रों के प्राप्तांको का मूल्यांकन करते है और मौसम विभाग विगत उपलब्ध आँकड़ो के विश्लेषण के आधार पर आगामी भाविष्य वाणी करता है।

5.2 सामान्य युक्तियाँ

- दैनिक जीवन के उदाहरणों द्वारा सांख्यिकी के अध्ययन हेतु प्रेरित करना। छात्रों को अपने आसपास के वातावरण से आँकड़े एकत्र करने और सांख्यिकी संकल्पनाओं जैसे सारिणी बद्ध करना, रेखीय प्रदर्शन करना, आँकड़ो का विश्लेषण तथा इस पर विचार विमर्श प्रक्रिया की ओर प्रेरित करना।
- जहाँ तक संभव हो वहाँ तक नई संकल्पना को विभिन्न स्थितियों से उदाहरण द्वारा प्रस्तावित किया जा सकता है।

5.3 मुख्य संकल्पनाएँ

- शब्द सांख्यिकी का प्रयोग एक और अनेक के संदर्भ में करते हैं।
- आँकड़ा : आँकड़ा का अर्थ – आँकड़ा का एकत्रीकरण, प्रथम तथा दूसरे स्तर का आँकड़ा, कच्चा/ अवर्गीकृत आँकड़ा।
- आँकड़े का सारणी के रूप में प्रदर्शन – बारंबारता बंटन सारणी
- आँकड़े का रेखीय प्रदर्शन
- दंडारेख
- संरचना और विचार – विमर्श
- समान और असमान वर्ग अंतरालों के आयतचित्र(histogram)
- बारंबारता बहुभुज
- केंद्रीय प्रवृत्ति के मापक
  — माध्य, बहुलक, अवर्गीकृत आँकड़ा का माध्यक
  — वर्गीकृत आँकड़े का, माध्य, बहुलक और माध्यक
  — तोरण – कम तथा अधिक प्रकार के
  — प्रायिकता
  — प्रयोगात्मक
  — सैद्धांतिक

5.4 शिक्षण विधियाँ

उपरोक्त मुख्य संकल्पानाओं से हम कुछ संकल्पनाओं पर चर्चा करते हैं।

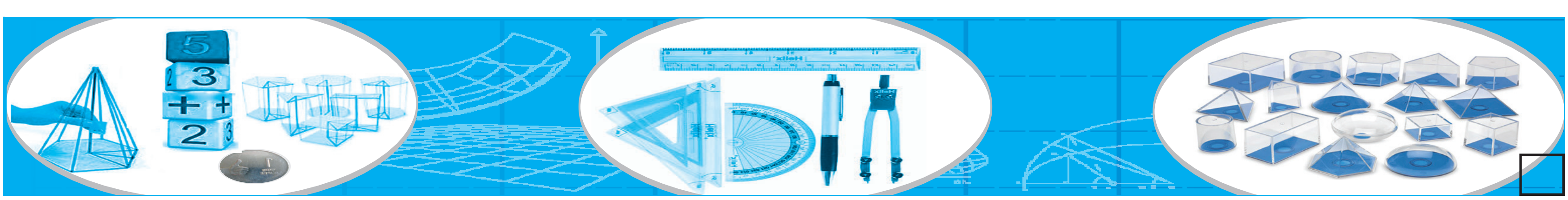
(i) आयतचित्र का शिक्षण

(ii) केंद्रीय प्रवृत्ति के मापकों, सतत वर्गीकृत आँकड़ो का माध्यक, बारंबरता बंटन का ,शिक्षण

(iii) प्रायिकता का शिक्षण- प्रयोगात्मक और सैद्धांतिक

(i) आयतचित्र का शिक्षण

आयतचित्र के शिक्षण के पहले अध्यापक को यह सुनिश्चित करना है कि छात्र निम्नलिखित संकल्पानाओं में निपुण हैं जो आयतचित्र के अध्ययन में आवश्यक है।



आँकड़ा का अर्थ

- आँकड़े का रेखीय निरूपण, चित्रालेख, दंडारेख- दंडारेख खींचना
- सामूहिक बारंबारता बंटन
- आयत का क्षेत्रफल
- अनुपात और समानुपात

T : अच्छा छात्रों, आप पहले से ही दंडारेख के विषय से परिचित हैं। आज हम अन्य रूप का आँकड़ो के रेखीय निरूपण पर चर्चा करते हैं जो दंडारेख जैसा दिखता है परन्तु निश्चित रूप से दंडारेख से भिन्न है। अध्यापक श्यामपटट पर निम्न बारंबारता बंटन लिखता है:

प्राप्तांक	छात्रों की संख्या
0-10	5
10-20	10
20-30	8
30-40	5
40-50	2

अध्यापक छात्रों से प्रश्न पूछता है कि यह सारणी क्या सूचना देती है ?

S: सर, यह सारणी किसी परीक्षण में 30 छात्रों द्वारा प्राप्त प्राप्तांक के विषय मे सूचना देती है।

T: प्रथम स्तंभ और दूसरा स्तंभ क्या सूचना देते हैं ?

S: प्रथम स्तंभ प्राप्तांक का परिसर निर्दिष्ट करता है और दूसरा स्तंभ छात्रों की संख्या बताता है जो वर्ग की बारंबारता है।

T: यह किस प्रकार का बंटन हैं ?

S_1: यह वर्गीकृत बारंबारता बंटन है।

S_2: यह सतत् है।

T: अच्छा। यह एक सतत् वर्गीकृत बारंबारता बंटन है। आज, हम इस प्रकार के बंटन का रेखीय निरूपण का अध्ययन करेंगे। हमें कैसे आरंभ करना चाहिए ?

S: हम परस्पर लंबवत और बिन्दु O पर प्रतिच्छेदित करती हुई दो रेखाओं को खींचते हैं।

अध्यापक अन्य छात्र से पूछता है कि अब आगे क्या किया जाए ?

S: हम प्राप्तांक को क्षैतिज अक्ष या x - अक्ष पर निरूपित करते हैं।

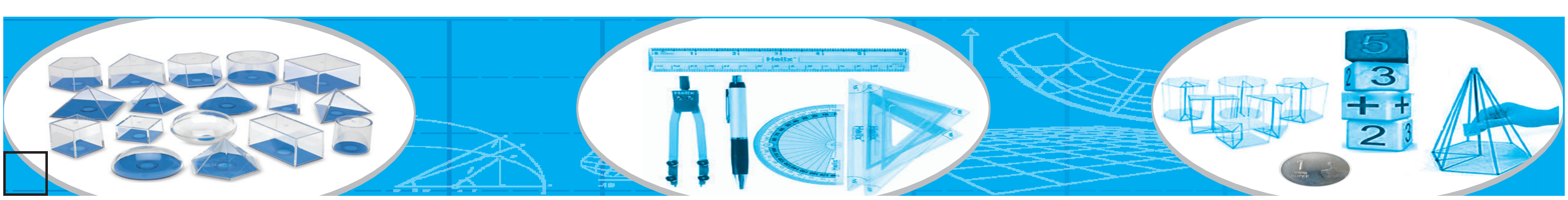
T: कैसे ?

S: एक समुचित नाप लेकर, उदाहरणार्थ, हम प्राप्तांक 10 को 1 cm द्वारा प्रदर्शित करते हैं।

T: अनुज, अब आगे कैसे बढ़ें ?

S: महाशय, क्षैतिज अक्ष के नीचे " चिन्ह $\longrightarrow$ " लिखते हैं।

S: हम ऊर्ध्वाधर या Y – अक्ष के अनुदिश छात्रों की संख्या (बारंबारता) ले सकते हैं।



T: कैसे ?

S: पुन: समुचित नाप लेकर।

S: चूँकि अधिकतम बारंबारता 10 है अत: हमें इस अधिकतम बारंबरता को समायोजित करने हेतु समुचित नाप का चुनाव करना होगा।

S: हम 2 छात्रों को निरूपित करने के लिए 1 cm ले सकते हैं।

T: क्या हमें इस अक्ष को भी चिन्हित करना चाहिए और कैसे ?

S: महाशय जी हाँ

S: हमें "छात्रों की संख्या" या " बारंबारता " को⟶ द्वारा निर्दिष्ट करना चाहिए।

> अध्यापक निरीक्षण करता है कि प्रत्येक छात्र इस प्रक्रिया में संलग्न हैं और क्रमिक रूप से आयतचित्र की संरचना करता है।

T: पहले से ही आप दंडारेख जानते हैं। कैसे आगे बढ़ा जाए ?

S: हम आयत या दंड खड़ा कर सकते हैं जैसा कि हम दंडारेख खींचने के लिए करते थे।

S: महाशय, क्या हम वर्ग अंतराल 0 – 10 पर 5 इकाई लंबाई (ऊँचाई) का आयत खींचे ?

T: हाँ, वर्ग अंतराल के बराबर की चौड़ाई तथा वर्ग की बारंबरता के बराबर लम्बाई लेकर आयत खींचिए।

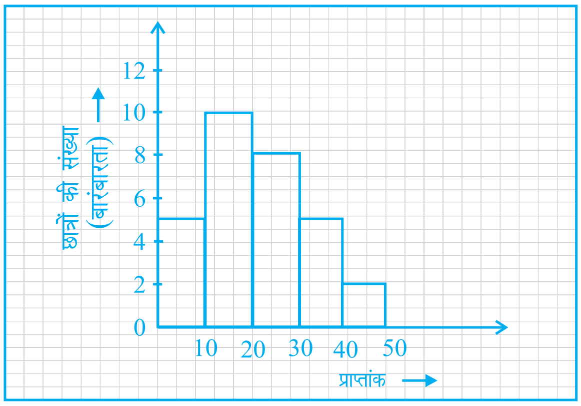
> अध्यापक वर्ग अंतराल 0- 10 पर आयत खींचने मे सहायता करते हैं और विद्यार्थियों से कहते है कि इसी तरीके का अनुसरण करते हुए अन्य वर्ग अंतरालों पर आयत खींचें।

T: क्या आप लोग सभी पाँचों आयतों को खींच चुके?

S: हाँ, महाशय

T: अपूर्व आगे आओ और श्यामपट्ट पर आकृति खींचो

अपूर्व श्यामपट्ट पर आकृति खींचता है।



T: यह आरेख दिए गए आँकड़े को निरूपित करता है। यह आयतचित्र कहलाता है।

S: सर, अंग्रेजी के शब्द (histogram) हिस्टोग्राम, का क्या अर्थ है ?

T: यहाँ 'हिस्टो' का अर्थ क्षेत्रफल और 'ग्राम' का अर्थ आरेख होता है। दंडारेख से यह किस तरह भिन्न है ?

S_1: महाशय, यह भी एक दंडारेख ही है।

S_2: दंडारेख की तरह यहाँ आयतों के बीच रिक्त स्थान नही है।

S_3 : सर, यह एक ठोस की आकृति जैसा प्रतीत होता है।

T: अच्छा; आपने आयतचित्र और दंडारेख में अंतर देखा है। यहाँ प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई क्या है ?

S: यह 10 है।

T: हाँ प्रत्येक वर्ग की चौडाई 10 अर्थात् वर्ग अंतराल 10 है।

S: हाँ, यह 10 है।

> अब अध्यापक प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए छात्रों से कहता है तथा अध्यापक व्याख्या करता है कि आयतों का क्षेत्रफल संगत बांरबारताओं के समानुपाती हैं।

T: प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल क्या है।

S_1: वर्ग अंतराल 0 – 10 पर बने आयत का क्षेत्रफल = 10 × 5 = 50 वर्ग इकाई

S_2: वर्ग अंतराल 10 – 20 पर आयत का क्षेत्रफल = 10 × 10 = 100 वर्ग इकाई

S_3: वर्ग अंतराल 20 – 30 पर बने आयत का क्षेत्रफल = 10 × 8 = 80 वर्ग इकाई

S_4: वर्ग अंतराल 30 – 40 पर बने आयत का क्षेत्रफल = 10 × 5 = 50 वर्ग इकाई

S_5: वर्ग अंतराल 40 – 50 पर बने आयत का क्षेत्रफल = 10 × 2 = 20 वर्ग इकाई है।

T: छात्रो, क्या आप आयत का क्षेत्रफल और संगत वर्ग की बांरबारता के बीच कोई संबध ज्ञात कर सकते हैं

S_1: प्रथम आयत के लिए

क्षेत्रफल = वर्गअंतराल × आयत की ऊँचाई (बांरबारता)

= 10 × बांरबारता = 10 × संगत बांरबारता

S_2: द्वितीय आयत के लिए

क्षेत्रफल = 10 × संगत बांरबारता

S_3: इसी तरह अन्य आयतों के लिए

T: अत: क्या हम कह सकते हैं कि प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल इसकी बारंबारता के समानुपाती होता है।

S: हाँ, महाशय

T: हम लिख सकते हैं:

आयत का क्षेत्रफल α बारंबारता अर्थात्

आयत का क्षेत्रफल = $k \times$ बारंबारता, जहाँ k समानुपातिक स्थिरांक है।

इस स्थिति में समानुपातिक स्थिरांक क्या है ?

S: यहाँ यह 10 है।

T: प्रिय छात्रों, आज हमने सीखा कि कैसे सतत् वर्गीकृत बांरबारता बंटन को रेखीय रूप में प्रस्तुत करें। यह प्रस्तुतीकरण आयत चित्र कहलाता है।

अध्यापक छात्रों को 2 – 3 सतत वर्गीकृत बांरबारता बंटन दें और छात्रों से कहें कि उपरोक्त चर्चित क्रमानुसार इनके हस्टिोग्राम खीचें।

T: ठीक छात्रों यहाँ निम्न वर्गीकृत बारंबरता बंटन दिया गया है:

वर्ग	बारंबारता
10-24	1
25-39	4
40-54	10
55-69	6
70-84	3
85-99	4

बंटन को निरूपित करने के लिए एक आयतचित्र खींचिए।

S_1: सर, पिछली स्थिति में, वर्ग सतत थे, परन्तु इस स्थिति में,यह ऐसा नहीं है

S_2: अत:, हम आयतचित्र नहीं खींच सकते हैं।

S_3 : सर, हम आँकड़े को सतत बनाते हैं तब आयतचित्र खींचना संभव है।

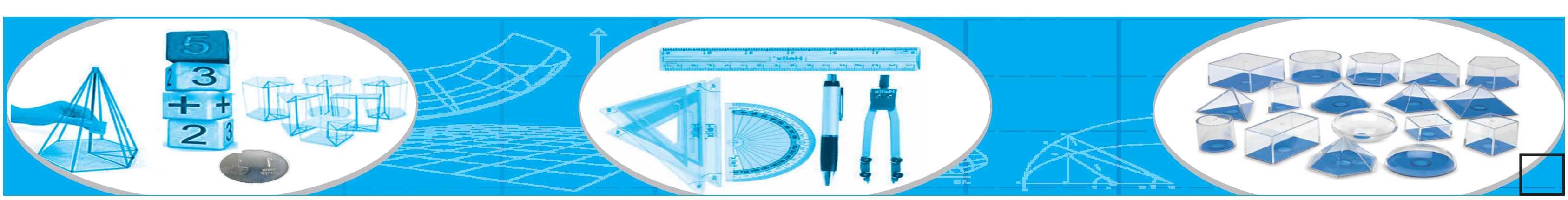
T: अच्छा तुम समझ गए तो कक्षा – वर्गों को सतत् बनाइए

S: सर, मैं वर्गों को सतत बना सकता हूँ:

9.5 - 24.5

24.5- 39.5

39.5 - 54.5



54.5 - 69.5

69.5 - 84.5

84.5 - 99.5

S_2: अत: हम निम्न सारणी प्राप्त करते हैं।

वर्ग	बारंबारता
9.5 - 24.5	1
24.5 - 39.5	4
39.5 - 54.5	10
54.5 - 69.5	6
69.5 - 84.5	3
84.5 – 99.5	4

T: अब क्या आप इस आँकड़े के लिए आयतचित्र बना सकते है।

S: हाँ सर

T: अब वर्ग अंतराल की चौड़ाई क्या है ?

S: 24.5 – 9.5 = 15, 39.5 – 24.5 = 15

54.5 – 39.5 = 15.. 99.5 – 84.5 = 15

अर्थात प्रत्येक स्थिति में वर्ग अंतराल की चौड़ाई 15 है।

T: आप आयतचित्र कैसे खींचेगे ?

S_1: चूँकि वर्ग अंतराल की चौड़ाई समान है अत: हम उसी विधि का अनुसरण करेंगे जैसा हमने सतत वर्गीकृत बारंबारता बंटन के लिए किया था।

S_2: यहाँ हम वर्गों

9.5 – 24.5 , 24.5 – 39.5,… 84.5 – 99.5 को

X-अक्ष के अनुदिश तथा क्रमश: बारंबारता को Y – अक्ष के अनुदिश लेंगे और तब आयत खींचते हैं जैसा हमने विगत उदाहरण में किया था

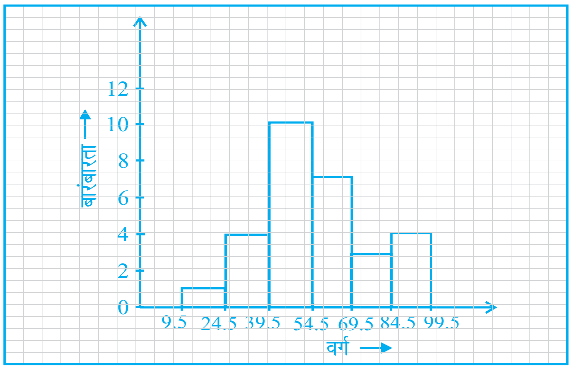
छात्र आयतों को खींचने में व्यस्त– हो जाते हैं जिसकी चौड़ाई क्रमश: वर्ग अंतराल की लंबाई और ऊँचाई बारंबारता के अनुरूप है।

T: क्या आप आयतचित्र खींच चुके है ?

S: हाँ सर

T: अनीता, आओ और श्यामपट्ट पर आयतचित्र खींचो

अनिता आयतचित्र खींचती है।



T: वर्ग अंतराल 9.5 - 24.5 को चौड़ाई लेकर इस पर बने आयत का क्षेत्रफल क्या है ?

S: सर, इस आयत का क्षेत्रफल

= 15 × आयात की ऊँचाई (बारंबारता)

= 15 × बारंबारता = 15 × 1

T: वर्ग 24.5 – 39.5 पर बने आयत का क्षेत्रफल क्या हैं ?

S_2: यह 15 × आयत की ऊँचाई है

अर्थात, 15 × बारंबारता = 15 × 4 = 60

T: वर्ग 39.5 – 54.5 पर बने आयत का क्षेत्रफल क्या है?

S_3 : इस आयत का क्षेत्रफल

= 15 × आयात की ऊँचाई

=15 × बारंबारता= 15× 10

T: अच्छा छात्रों

आपने पाया कि प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल =15 × वर्ग की बारंबारता है।

इसका तात्पर्य है कि

प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल बारंबारता के समानुपाती है या प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल α बारंबारता

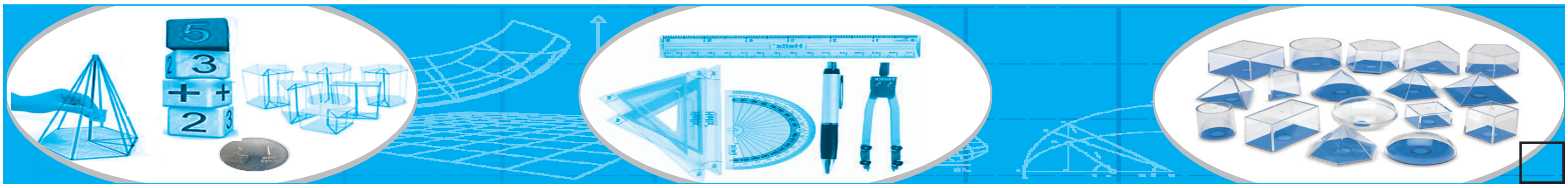
अवीन, बताओ यहाँ समानुपाती का स्थिरांक क्या = है ?

अवीन : क्या यह 15 नही है, सर?

T: हाँ। जाँच करो कि यह प्रत्येक आयत के लिए समान है।

अध्यापक अब इस बात पर पुन: बल देता है कि आयतों के बीच रिक्तता नहीं है और आयतों का क्षेत्रफल क्रमिक बारंबारता के समानुपाती है।

उपरोक्त चर्चा पर आधारित अध्यापक 2 – 3 वर्गीकृत बारंबारता बंटन दे सकता है (जहाँ वर्गों की चौड़ाई समान तथा जो सतत नहीं हो) और छात्रों से उनका आयतचित्र खींचने के लिए कहता है। पुन: छात्रों से प्रत्येक स्थिति में समानुपाती का स्थिरांक ज्ञात करने को कहता है।



T: छात्रों पहले से ही आप जानते हैं कि कैसे आयतचित्र प्रयुक्त कर वर्गीकृत बारंबारता बंटन का रेखीय निरूपण करते हैं। चलिए हम निम्न आँकड़े का आयतचित्र खींचते है:

मात्रा (kg में)	बारंबारता
6-9	4
9-12	6
12-15	10
18-21	3
21-30	12

S_1: महाशय, मैं इस आँकड़े का आयतचित्र खींच सकता हूँ।

T: आप कैसे खीचेंगे ?

S_2: हम सर्वप्रथम दो लंबवत रेखाएँ O पर मिलती हुई लेते हैं।

T: पुन: क्या ?

S_1: हम क्षैतिज अक्ष अर्थात x – अक्ष के अनुदिश वर्ग अंतराल लेते हैं और क्रमिक बारंबारता ऊर्ध्वाधर अक्ष अर्थात y – अक्ष लेते हैं। इसके हेतु समुचित नाप लेते हैं।

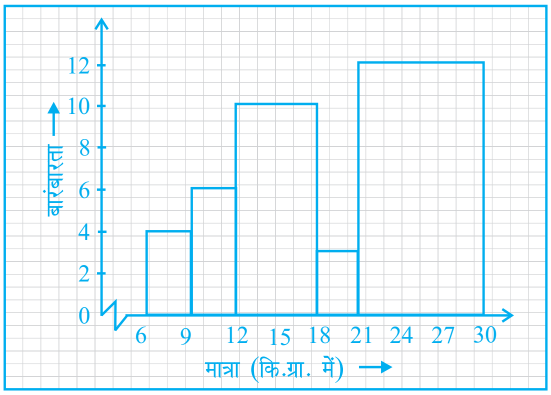
S_2: हम प्रत्येक वर्ग अंतराल पर उनकी क्रमिक बांरबारता के बराबर ऊँचाई का आयत बनाते हैं।

छात्र आयतचित्र खींचने में व्यस्त हो जाते हैं।

T: मै समझता हूँ कि अब तक आप अपना कार्य पूरा कर लिए हैं। आप में से कौन श्याम पटट् पर इसे खींचने आयेगा ताकि हम सभी देख सकें?

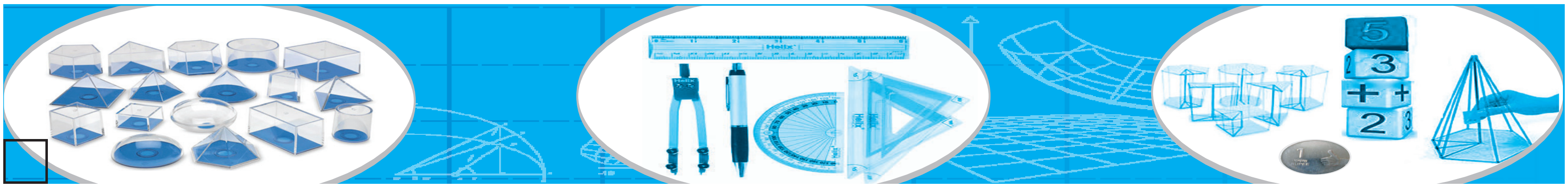
S: सर, मैं इसे कर सकता हूँ।

अध्यापक आँकड़े पर आधारित आयतचित्र खींचने को कहता है। छात्र इसे खींचता है:



T: क्या: यह ठीक है

S: हाँ सर,



T: चलिए प्रत्यके आयत का क्षेत्रफल निकाले। वर्ग अंतराल
6 – 9 पर बने आयत का क्षेत्रफल क्या है ?

S: यह 3 × ऊँचाई

= 3 × बारंबारता

= 3 × 4 = 12 वर्ग इकाई है।

T: दूसरे आयत का क्षेत्रफल क्या है ?

S: इस आयत का क्षेत्रफल 3 × ऊँचाई

= 3 × बारंबारता

= 3 × 6 = 18 वर्ग इकाई है।

T: वर्ग अंतराल 12 – 18 पर बने आयत का क्षेत्रफल क्या = है ?

S: यह 6 × ऊँचाई = 6 × बारंबारता = 6 × 10 = 60 वर्ग इकाई है ।

T: वर्ग अंतराल 18 – 21 और 21 – 30 पर आयतों का क्षेत्रफल क्या है ?

S: ये: 3 × ऊँचाई = 3 × बारंबारता = 3 × 3 = 9 वर्ग इकाई, और 9 × ऊँचाई = 9 × बारंबारता = 9 × 12 = 108 वर्ग इकाई है।

T: जैसा आप जानते हैं कि आयतचित्र में प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल उसकी बारंबारता के समानुपाती है। प्रत्येक स्थिति में समानुपाती का स्थिरांक क्या है?

S: पहली स्थिति के आयत में यह 3 है।

S: दूसरी स्थिति के आयत में यह 3 है।

S: तीसरे आयत में यह 6 है।

S: चौथे आयत में यह 3 हैं

S: पाँचवें आयत में यह 9 है।

T: क्या समानुपाती स्थिरांक समान है ?

S: तीन आयतों के लिए यह समान है परन्तु दो आयतों के लिए समान नही है।

T: अत: यह आयतचित्र सही नहीं है।

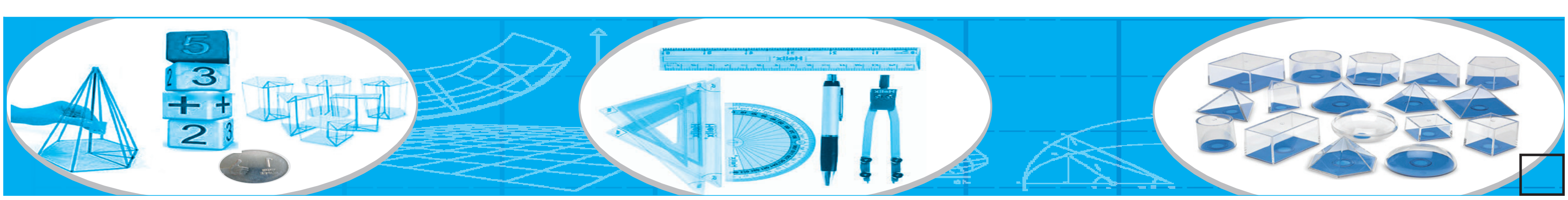
छात्र परस्पर चर्चा करते हैं कि यह ठीक क्यों नही है। तब अध्यापक प्रश्न करता है कि क्या प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई समान है।

S: नहीं वर्ग अतराल 6 – 9, 9 – 12 और 18 – 21 के लिए यह समान है परन्तु वर्ग अंतराल 12 – 18 (6 है) और वर्ग अंतराल 21 – 30 के लिए यह (9 है)।

T: चूँकि वर्ग समान चौड़ाई के नहीं हैं। अत: आयतों का क्षेत्रफल बारंबारता के समानुपाती नहीं है।

स्मरण कीजिए कि पिछले उदाहरण में वर्गों की चौड़ाई समान थी। इसलिए आयतों की चौड़ाई समान थी। अत: आयतों के क्षेत्रफल उसकी बारंबारता के समानुपाती थे।

S: सर, इस स्थिति में क्या किया जाए?



T: यहाँ हमें बारंबारता को ऐसे लेना पड़ेगा ताकि आयतों का क्षेत्रफल उनकी बारंबारता के समानुपाती हो। ऐसी स्थिति में हम बारंबारताओं से एक बारंबारता को मानक के रूप में लेते है और अन्य बारंबारताओं को निम्न सूत्र द्वारा निश्चित करते हैं:

$$\text{समायोजित बारंबारता} = \frac{\text{मानक बारंबारता}}{\text{वर्ग का आकार}} \times \text{इसकी बारंबारता}$$

मान लीजिए कि मानक बारंबारता 3 है।

तब,

वर्ग 6 – 9 की समायोजित बारंबारता $= \frac{3}{3} \times 4 = 4$ है

वर्ग 9 – 12 की समायोजित बारंबारता $= \frac{3}{3} \times 6 = 6$ है

वर्ग 12 – 18 की समायोजित बारंबारता $= \frac{3}{6} \times 10 = 5$ इत्यादि।

वर्ग 18 – 21 की समायोजित बारंबारता क्या है ?

S: महाशय यह $= \frac{3}{3} \times 3 = 3$ होगी

T: वर्ग 21 – 30 की समायोजित बारंबारता क्या है ?

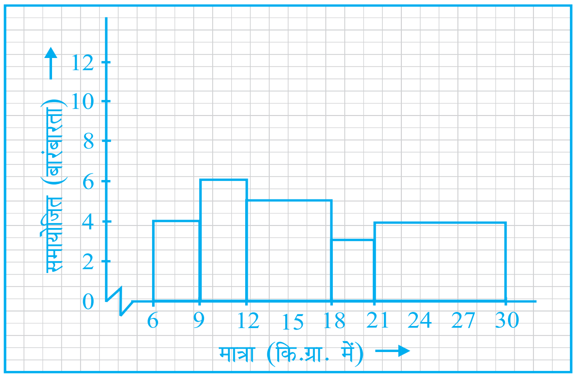
S: महाशय, समायोजित बारंबारता $= \frac{3}{9} \times 12 = 4$ है

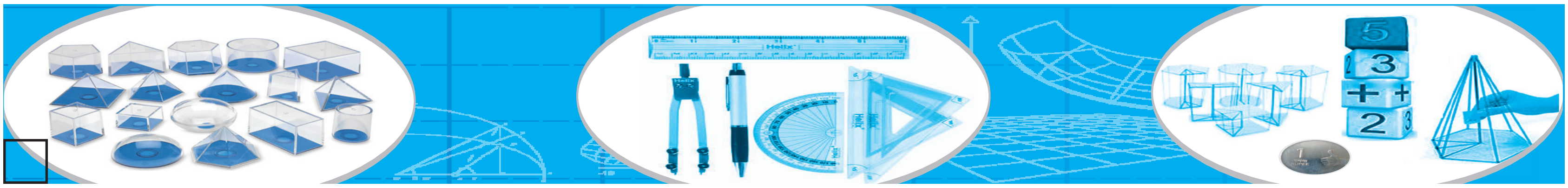
T: अब समायोजित बारंबारता प्रयुक्त कर सारणी पुन: लिखें।

मात्रा (कि. ग्राम में)	समायोजित बारंबारता
6-9	4
9-12	6
12-18	5
18-21	3
21-30	4

T: अब आप इस नये बंटन का आयतचित्र खींच सकते हैं। छात्र तदनुसार आयतचित्र खींचते हैं।

T: शोभा, यहाँ आओ और इस बंटन का आयतचित्र खींचो।





T: हाँ, यह सही आयतचित्र है। अच्छा छात्रों अब आप जाँच कर सकते हो कि आयतों का क्षेत्रफल बारंबारता के समानुपाती है। क्या आप इसकी जाँच कर सकते हैं ?

S: वर्ग चौड़ाई 6 – 9 पर बने आयत का क्षेत्रफल = 3×4

वर्ग चौड़ाई 9 – 12 पर बने आयत का क्षेत्रफल = 3×6

वर्ग चौड़ाई 12 – 18 पर बने आयत का क्षेत्रफल = $6 \times 5 = 30 = 3 \times 10$

वर्ग चौड़ाई 21 – 30 पर बने आयत का क्षेत्रफल = $9 \times 4 = 3 \times 12$

T: अत: प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल = 3× इसकी बारंबारता। इसलिए प्रत्येक आयत का क्षेत्रफल α इसकी समायोजित बारंबारता है और समानुपाती का नियतांक = 3 है।

> अब अध्यापक छात्रों को सलाह देता है कि बदलती चौड़ाई के वर्गों की स्थिति में आप किसी भी वर्ग की चौड़ाई को मानक बारंबारता ले सकते हैं और छात्रों से उसी प्रश्न को करने में मानक बारंबारता 6 या 9 या अन्य लें। परन्तु गणना तथा भिन्नात्मक बारंबारता से बचने के लिए समायोजित बारंबारता को पूर्ण संख्या लें।

पुनरावलोकन – प्रश्न

1. उपरोक्त चर्चा के आधार पर छात्रों से वर्गीकृत बारंबारता बंटन के लिए बारंबारता बहुभुज की संरचना पर चर्चा करें।
2. जैसा कि आयतचित्र में चर्चा हुई वैसा ही बारंबारता बंटन के लिए अपेक्षाकृत कम और अपेक्षाकृत अधिक दोनों प्रकार के तोरण बारंबारता तोरण की संरचना हेतु चर्चा करें।

(ii) वर्गीकृत बारंबारता बंटन का माध्यक

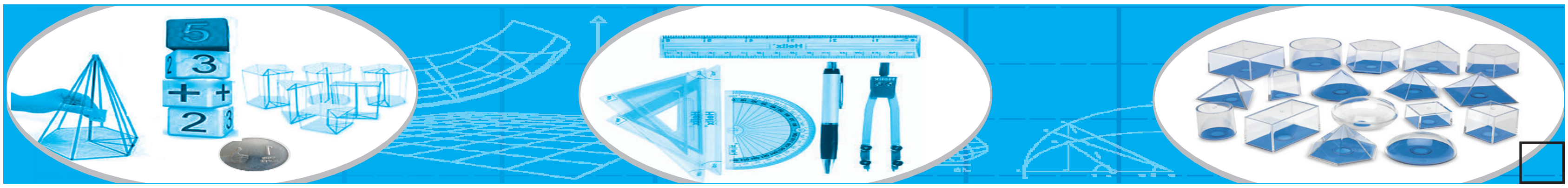
सतत वर्गीकृत बंटन के अध्ययन के अध्यापन के पहले शिक्षक को यह सुनिश्चित करना पड़ता है कि छात्र निम्नलिखित संकल्पनाओं से अच्छी तरह परिचित हैं जो निम्न अध्ययन हेतु वांछनीय है:

- माध्यक – केन्द्रीय प्रवृत्ति के मापक से एक है।
- माध्यक प्रेक्षण का वह मान है जो आँकड़े को दो बराबर (लगभग) भागों में बाँट देता है जब आँकड़े आरोही (या अवरोही) क्रम में व्यवस्थित किये जाते हैं।
- अपरिष्कृत आँकड़े का माध्यक
- संचयी बारंबारता बंटन
- अवर्गीकृत आँकड़े के माध्यक का परिकलन

निम्नलिखित तरीके से अध्यापक चर्चा आरंभ कर सकता है।

T: छात्रों आप अवर्गीकृत और वर्गीकृत आँकड़ों के लिए माध्य के विषय में अध्ययन कर चुके हैं जो एक केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है। माध्यक एक अन्य केन्द्रीय प्रवृत्ति का मापक है। आप पहले ही अवर्गीकृत आँकड़े का माध्यक ज्ञात करना पढ़ चुके हैं। आज हम सतत् वर्गीकृत बंटन के माध्यक ज्ञात करने हेतु चर्चा करेंगे।

उदाहरणार्थ, चलिए निम्नलिखित बंटन का माध्यक ज्ञात करें:



आयु (वर्षों में	अध्यापकों की संख्या (बारंबारता)
20-25	7
25-30	11
30-35	18
35-40	20
40-45	15
45-50	14
50-55	15

क्या आप अवर्गीकृत आँकड़े का माध्यक करने की विधि का स्मरण कर सकते हैं?

S: महाशय, अवर्गीकृत आँकड़े की स्थिति में हम सर्वप्रथम संचयी बारंबारता सारणी तैयार करते थे। क्या हमें यहाँ ऐसा नहीं करना चाहिए?

T: हाँ

S: अत: हमें सर्वप्रथम संचयी बारंबारता सारणी तैयार करनी चाहिए।

T: ठीक, इसे तैयार करो

आयु (वर्षों में)	बारंबारता	संचयी बारंबारता
20-25	7	7
25-30	11	18(7+11)
30-35	18	36(7+11+18)
35-40	20	56
40-45	15	71
45-50	14	85
50-55	15	100

T: ठीक। यह एक संचयी सारणी है। सभी कितने प्रेक्षण हैं ?

S: सर, 100

T: मान लीजिए n अर्थात्, $n = 100$

कौन सा प्रेक्षण माध्यक होगा ?

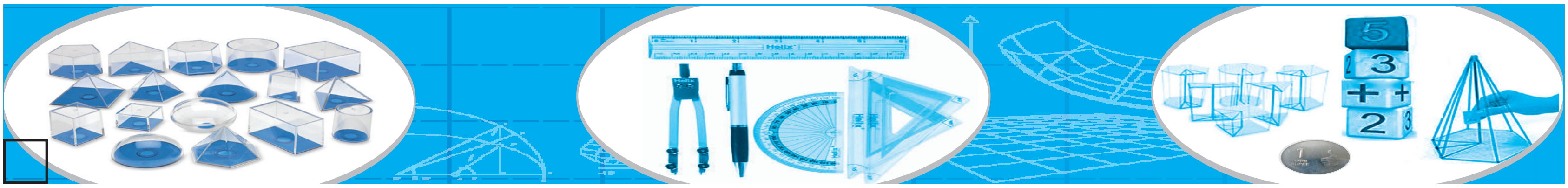
S: यहा n सम (अर्थात 100) संख्याँ है। अत: माध्यक $\frac{n}{2}$ वाँ और $(\frac{n}{2}+1)$ वाँ प्रेक्षणों का औसत (माध्य)होगा।

T: अत: $\frac{n}{2}$ वाँ और $(\frac{n}{2}+1)$ वाँ क्या हैं ?

S: $\frac{n}{2} = 50$ वाँ, $(\frac{n}{2}+1) = 51$ वाँ

T: ये दोनों प्रेक्षण किस वर्ग में पड़ते हैं ?

T: वे दोनो वर्ग 35 – 40 में पड़ते हैं।



T: वर्ग 35 – 40 माध्यक वर्ग कहलाता है क्योंकि दोनो प्रेक्षण (50 वाँ और 51वाँ) इसी वर्ग में पड़ते हैं। परन्तु हम नही जानते कि कौन से प्रेक्षण 50वाँ और 51वाँ हैं।

S_1: आगे कैसे बढ़ें ?

S_2: सर, एक बात स्पष्ट है कि माध्याक 35 या इससे अधिक होगा।

S_3: और 40 से कम

T: पुन: आगे कैसे बढ़ें ?

S: मै नहीं जानता, कृपया सहायता करें

T: इस कठिनाई को हटाने के लिए, हम ऐसी स्थिति में माध्यक ज्ञात करने हेतु निम्न सूत्र का उपयोग करते हैं।

$$\text{माध्यक} = l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times \hbar$$

जहाँ l = माध्यक वर्ग की निचली सीमा

n = प्रेक्षणों की संख्या

cf = माध्यक वर्ग के पिछले वर्ग की संचयी बारंबारता

f = माध्यक वर्ग की बारंबारता

$\hbar$ = वर्ग – आकार (यह मानते हुए कि सभी वर्ग समान चौड़ाई के हैं।)

अत: यहाँ l क्या है ?

S_1: माध्यक वर्ग 35 – 40 है। इसकी निचली सीमा 35 है। अत: इसकी निचली सीमा 35 है।

S_2: यहाँ $n = 100$ और $\frac{n}{2} = 50$ है।

T: यहाँ इसकी cf क्या है ?

S: यह माध्यक वर्ग के पहले वर्ग की संचयी बारंबारता है।

T: माध्यक वर्ग क्या है ?

S: 35 – 40

T: माध्यक वर्ग के ठीक पहले कौन सा वर्ग है ?

S: 30 – 35

T: तब इसका cf क्या है ?

S: यह 18 है।

T: क्या यह सही है ?

S: नहीं सर, 30 – 35 वर्ग की बारंबारता 18 है।

T: तब, इसकी cf क्या है ?

S: यह 36 है अर्थात् $cf = 36$

T: हाँ, अब यह सही है। यहाँ f क्या है ?

S: f माध्यक वर्ग की बारंबारता है।

T: तब f बराबर है ____ ?

S: यह 20 है।

T: हाँ, $f = 20$ । यहाँ $\hbar$ क्या है ?

S: यहाँ $\hbar = 5$ है।

T: कैसे ?

S: 25 - 20 = 30 - 25 = 35 - 30 = 40 - 35 = 45 - 40 = 50 - 45 = 55 - 50 = 5

प्रत्येक वर्ग की चौड़ाई (आकार) 5 है।

T: सूत्र में l, $\frac{n}{2}$, cf , f और $\hbar$ का मान रख कर अब दिए गए बंटन का माध्यक परकलित कीजिए। अब सभी छात्र माध्यक का परिकलन करने में व्यस्त हो जाते हैं।

थोड़ी समय बाद

T: क्या आप सभी माध्यक का परिकलन कर चुके हैं ?

S_1: सर, मैं कर चुका हूँ।

S_2: सर, मैं इसे पूरा करने के समीप हूँ।

T: ठीक है । असलम क्या तुम माध्यक ज्ञात कर चुके हो?

असलम: हाँ सर, यह 38.5 है

T: अपना परिकलन श्यामपट्ट पर लिखो

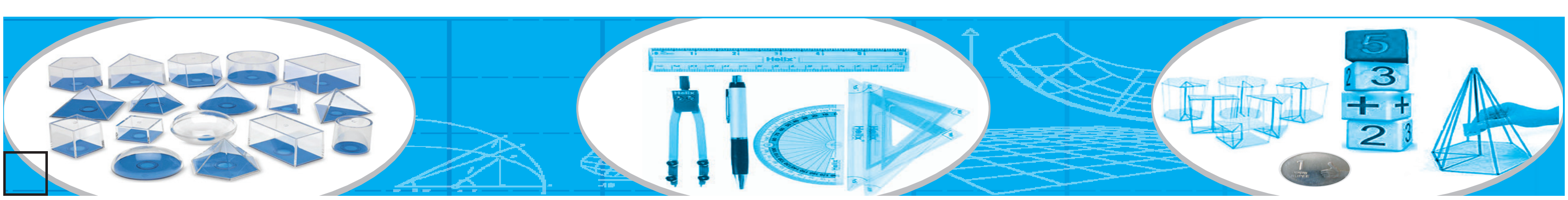
(असलम श्यामपट्ट पर लिखता है)

माध्यक $= l + \left(\dfrac{\frac{n}{2} - cf}{f}\right) \times \hbar$

$$= 35 + \left(\frac{50-36}{20}\right) \times 5$$

$$= 35 + \left(\frac{14 \times 5}{20}\right)$$

$$= 35 + 3.5 = 38.5$$



T: हाँ, तुम्हारा उत्तर सही है अर्थात् आँकड़े का माध्यक = 38.5

या अध्यापक की माध्यक आयु 38.5 वर्ष है।

S: सर, यह क्या दर्शाता है ?

T: माध्यक आयु 38.5 दर्शाता है कि करीब 50% अध्यापकों की आयु 38.5 वर्ष से कम है और 50% अध्यापकों की आयु 38.5 वर्ष से अधिक है।

T: सूत्र में परंपरागत परिकलन की सुविधा के अनुसार हम $\frac{n}{2}$ या $\frac{n+1}{2}$ लेते हैं।

S: हाँ, हमें यह स्पष्ट नहीं है यह सूत्र कैसे निकला ?

T: क्या आप इस बात का स्मरण कर सकते हैं कि वर्गीकृत आँकड़े का माध्य ज्ञात करने के लिए हम यह मान लिए कि वर्ग में प्रेक्षण अपने मध्यबिंदु (वर्ग चिन्ह) पर केन्द्रित होते हैं। इसी तरह की कल्पना यहाँ हम सूत्र विकसित करने के लिए करते हैं। कल्पना यह है कि वर्ग के प्रेक्षण समान रूप से बंटित हैं।

S: सर, यह हम लोगों को स्पष्ट नहीं है। कृपया स्पष्ट करें।

T: आप देखते हैं कि माध्यक वर्ग 35 – 40 में 20 प्रेक्षण हैं: इसका आकार 5 है। यदि हम वर्ग अंतराल की लंबाई को विभाजित करें अर्थात् 5 कों 20 बराबर भागों में तब प्रत्येक भाग का मान $\frac{5}{20}$ है।

माध्यक वर्ग 35 – 40 में माध्यक प्रेक्षण तक प्रेक्षणों की संख्या 14 अर्थात् (50 – 36) है।

अत: 14 अर्थात् (50 – 36) भागों का मान

$$= (50 - 36) \times \frac{5}{20}$$

अत: माध्यक $= 35 + (\frac{50-36}{20}) \times 5$

$$= l + \left(\frac{\frac{n}{2} - cf}{f} \right) \times h$$

50 वाँ प्रेक्षण माध्यक वर्ग की निचली सीमा से 14 भाग दूर है।

अत: 50 वें प्रेक्षण का मान

$= 35 + \frac{5}{20} \times 14 = 38.5$ है।

यद्यपि, यदि आप 51 वाँ प्रेक्षण का मान परिकलित करें तो यह

$35 + \frac{5}{20} \times 15 = 38.75$ होगा।

अत: माध्यक $= \dfrac{38.75 + 38.75}{2} = 38.6$ वर्ष (लगभग) दोनो 38.5 और 38.6 का अंतर ठीक 0.1 है जो नगण्य है।

S: सर, पुन:यहाँ मान लीजिए कि वर्ग सतत नही है। तब उस स्थिति में कैसे बढ़ें?

T: तब आपको वर्गो को सतत बनाना पड़ेगा।

पुनरावलोकन प्रश्न:

1. छात्रों से सतत वर्गीकृत बारंबारता बंटन के बहुलक की परिकलन पर उसी तरह चर्चा करें जैसा कि आप माध्यक के लिए किए।
2. इसी तरह आप छात्रों से वर्गीकृत बारंबारता बंटन के माध्य की परिकलन पर चर्चा करें।

(iii) प्रायिकता

T: छात्रों मुझे बताओ कि क्या आज संध्या के समय वर्षा होगी ?

S_1: सर, वर्षा हो सकती है क्योंकि आज बहुत गरमी है।

S_2: सर, वर्षा हो भी सकती है और नहीं भी हो सकती है।

T: इसका तात्पर्य यह है कि आप मेरे प्रश्न का निश्चित उत्तर नही दे सकते हैं।

अब देखिए कि यह क्या है?

S: यह एक आरेखण पिन है।

T: यदि इसे छोड़ता हूँ तो क्या इसका नुकीला बिंदु निचे होगा।

S: समान्यत: इसका नुकीला बिंदु निचे नहीं पड़ेगा ।

T: ऐसा आप कैसे कह सकते हैं?

S_1: समान्यत: जब इसे गिराया जाता है तब इसका शीर्ष भाग या बगल का भाग जमीन पर आता है।

S_2: सर, इसका नुकीला भाग भी जमीन पर पहुँच सकता है।

T: पुन: आप सुनिश्चित नहीं कर पाते हैं कि पिन का शीर्ष भाग जमीन पर पहुँचेगा या नहीं। अत: मेरे प्रश्न का कोई निश्चित उत्तर नहीं है।

आप जानते है कि कल भारत और पाकिस्तान के बीच क्रिकेट मैच है। कौन टीम टास जीतेगी?

S_1: भारत

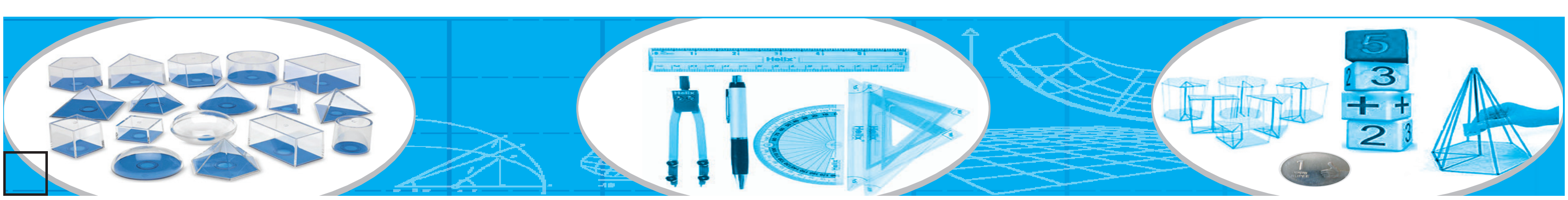
S_2: पाकिस्तान

S_3: यह भारत या पाकिस्तान हो सकता है। निश्चित रूप से हम यह नहीं कह सकते कि टास कौन जीतेगा।

T: पुन: हमारे प्रश्न का कोई निश्चित उत्तर नही है।

क्या अगले महीना पेट्रोल – पदार्थों का मूल्य बढ़ेगा?

S_1: सर, हो सकता है।



S$_2$: सर मूल्य नीचे भी जा सकता है।

S$_3$: यह भी संभव है कि न बढ़े न घटे। मूल्य आज की तरह समान ही रहे।

T: इसका तात्पर्य यह है कि पुन: मेरे प्रश्न का निश्चित उत्तर नहीं है।

अत: प्रिय छात्रों जैसा कि हमने पूछा, कुछ प्रश्न ऐसे होते हैं जिसका कोई निश्चित उत्तर नहीं होता है। ऐसे प्रत्येक प्रश्न में हो सकता है या नहीं हो सकता है, सन्निहित है। ऐसे प्रश्नों के उत्तर में अनिश्चितता बनी रहती है। यह अनिश्चितता अंकीय रूप में मापी जा सकती है जिसका अध्ययन हम जिस विषय में करते है उसे प्रायिकता कहते हैं।

प्रायिकता का आंरभ सिक्कों की उछाल, पासा फेंकना, ताश के पत्तों से संबंधित इत्यदि खेलों में जुआड़ियों द्वारा शर्तों को जीतने की खोज – बीन से हुआ। विस्तारित रूप में यह भौतिक विज्ञान, वाणिज्य, जीव विज्ञान, चिकित्सा विज्ञान, बीमा, मौसम पूर्वानुमान इत्यादि क्षेत्रों में प्रयुक्त हुई।

T: एक रूपये का सिक्का लीजिए और इसे 20 बार उछालें तथा चित और पट की संख्या लिखें। प्रत्येक छात्र इस क्रिया को करता है और अध्यापक चित पट की संख्या श्यामपट्ट पर सभी छात्रों के लिए लिखता हैं।

चित

पट

विद्यार्थी	चितों की संख्या	पटों की संख्या
1	6	14
2	12	8
3	9	11
.	.	.
.	.	.
.	.	.
.	.	.
40	.	.

T: उछालों की संख्या कितनी है ?

S: 20× 40 = 800 है।

T: कितनी बार आप चित पाए ?

S: यह 480 हैं

T: कितनी बार आप पट पाए ?

S: 320

T: सिक्के के प्रत्येक उछाल को अभिप्रयोग कह सकते हैं। अत: 800 अभिप्रयोग प्रयोग हैं। जिसमें 480 चित और 320 पट हैं।

T: यहाँ एक पाशा है। क्या पहले आप पासा देखे हैं?

S_1: मैं इसे देख चुका हूँ।

S_2: लुडो खेलने में हम इसका उपयोग करते थे।

S_3: हम इसे "साँप और सीढ़ी" के खेल में भी उपयोग करते थे।

T: क्या और अधिक पाशे के खेल के विषय में जानते हो?

S_1: यह आकार में घनाकार होती है।

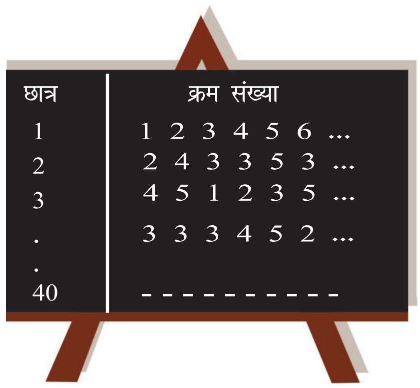
S_2: इसके फलकों पर 1, 2, 3, 4, 5, 6 लिखा होता है।

S_3: मैने इसके फलकों पर बिंदुओं •, ••, ∴, ∷, ⁙ को देखा है।

T: क्या कभी आपने देखा कि विपरीत फलकों पर लिखी संख्याओं का योग 7 है ?

S: नहीं, सर चलो इस पासा पर इसकी जाँच करते हैं।
सर, यह सही है।

T: अब, आप में से प्रत्येक इसे 20 बार फेंकेगा और इसके शीर्ष फलक की संख्या हमें बतायेंगे।



अत: प्रत्येक छात्र इस प्रयोग को करता है और अध्यापक श्यामपट्ट पर सारणी बनाता है।

T: कितनी बार 1, 2, 3, 4, ---- 6' आया गणना कीजिए कितनी बार अभिप्रयोग प्रयोग किया ?

S_1: महाशय $20 \times 40 = 800$ अभिप्रयोग

S_2: 132 बार 1 आया

S_3: 148 बार 2 आया

S_4: 120 बार 3 आया

S_5: 164 बार 4 आया

S_6: 124 बार 5 आया

S_7: 112 बार 6 आया

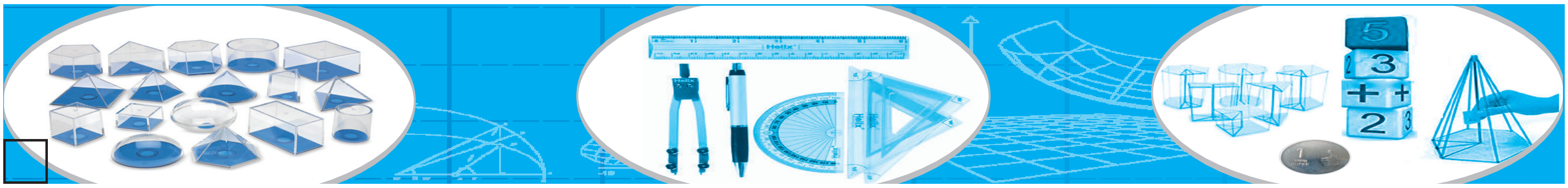
T: चित (इसे H भी लिखा जाता है) और पट (T) सिक्का उछालने के प्रयोग के परिणाम हैं।

T: किसी पासे को फेकने पर क्या परिणाम आते है?

S_1: 1, 2, 3

S_2: 1, 2, 3, 4, 5, 6

T: सिक्का उछालने पर "चित प्राप्त करना" एक घटना है। यदि हम एक सिक्का उछालते हैं और चित आता है तो हम कहते हैं कि "चित आने की घटना' घटित हुई है। इस प्रकार एक पाशा फेंकने पर '1 की प्राप्ति' एक आने की घटना है, "2 की प्राप्ति' भी एक घटना है। "3 की प्राप्ति के विषय में क्या है?



S_1: यह भी एक घटना है।

S_2: '4 की प्राप्ति, "5 की प्राप्ति', '6 की प्राप्ति" भी पासा फेकने के प्रयोग की घटनाएँ हैं।

T: हम घटना को 'E' द्वारा व्यक्त करते हैं।

क्या आप पासा फेंकने के प्रयोग से संबधित किसी घटना को बता सकते हैं।

S: "विषम संख्या की प्राप्ति" अर्थात 1, 3, 5

S: ' सम संख्या की प्राप्ति" अर्थात, 2, 4, 6

S: ' 2 से अधिक संख्या की प्राप्ति' अर्थात 3, 4, 5, 6

T: अत: पासा फेकने के प्रयोग से संबधित और अनेक घटनाएँ हो सकती हैं।

हम किसी घटना E की (प्रायोगिक) प्रायिकता P(E) द्वारा व्यक्त परिभाषित करते है यथा

$$P(E) = \frac{\text{अभिप्रयोगों की संख्या जिनमें संख्या घटना हुई है}}{\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या}}$$

S: सर, हम इसे प्रायोगिक प्रायिकता क्यों कहते हैं।

T: जैसा कि हमने एक प्रयोग किया है इसलिए P(E) को हम प्रायोगिक प्रायिकता कहते हैं।

इसे आनुभाविक प्रायिकता भी कहा जाता है। लेकिन यहाँ हम प्रायिकता शब्द का प्रयोग प्रायोगिक प्रायिकता के लिए करेंगे।

इस प्रकार यदि E 'चित प्राप्ति" की घटना है तो सिक्का उछालने के प्रयोग के लिए घटना E की प्रायिकता,

$$P(E) = \frac{480 \leftarrow (\text{चित आने की कुल संख्या})}{800 \rightarrow (\text{अभिप्रयोगों की कुल संख्या})}$$

अर्थात चित प्राप्त करने की प्रायिकता = 0.6

S: ' पट प्राप्ति' की प्रायिकता = $P(E) = \frac{320}{800} = 0.4$

T: पाशा फेंकने के प्रयोग में अभिप्रयोगों की संख्या क्या है?

S: 800

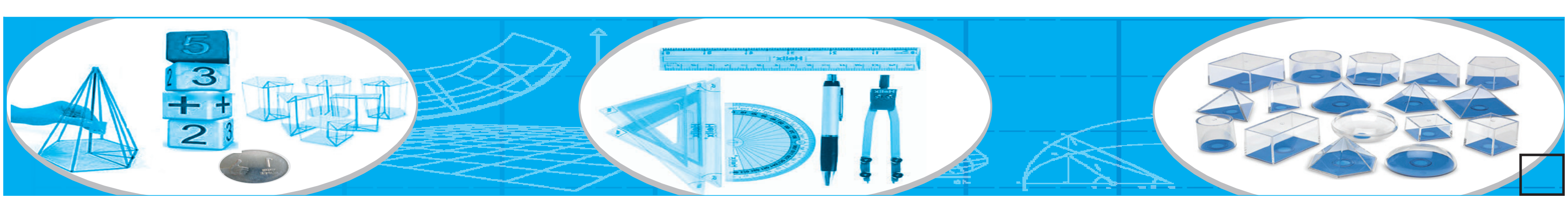
T: घटना "1 प्राप्ति की " प्रायिकता क्या है?

S: यह $\frac{132}{800}$ = है

S: यदि E " प्राप्ति 1 की घटना' व्यक्त करती है तो

$$P(E) = \frac{132}{800} = 0.165$$

T: "2 प्राप्ति की" प्रायिकता क्या है ?



S: P(2 की प्राप्ति) = $\frac{148}{800}$ = 0.185

T: “3 प्राप्ति की” प्रायिकता क्या है ?

S: P(3 प्राप्ति की) = $\frac{120}{800}$ = 0.150

S: अब मैं “4 प्राप्ति”, “5 प्राप्ति”, “6 प्राप्ति” की प्रायिकता बता सकता हूँ।

T: हाँ

S: P(4 प्राप्ति) = $\frac{164}{800}$ = 0.205

P(5 प्राप्ति) = $\frac{124}{800}$ = 0.155

P(5 प्राप्ति) = $\frac{112}{800}$ = 0.140

T: सभी प्रायिकताएँ अर्थात P (1 प्राप्ति) + P (2 प्राप्ति)........ + P (6 प्राप्ति) का योग ज्ञात कीजिए

S: सर, 0.165 + 0.185 + 0.150 + 0.205 + 0.155 + 0.140 = 1

T: एक सिक्का के उछाल के प्रयोग में, P (चित प्राप्ति) = P(H) और P(पट प्राप्ति)= P(T) का योग क्या है?

S: P(H) + P(T) = 0.6 + 0.4 = 1

T: अत: हम कह सकते हैं कि किसी प्रयोग में सभी परिणामों की प्रायिकता का योग 1 होता है। और विशेष इन प्रायिकताओं के विषय में क्या देखते हो?

S: प्रत्येक 1 से कम की भिन्न है।

S: प्रत्येक 0 से बड़ी भिन्न है।

T: अत: P(E), 0 और 1 के बीच में पड़ने वाली संख्या है। पासा फेकने के प्रयोग कें “7 प्राप्ति” की प्रायिकता क्या है?

S: इस प्रयोग में किसी भी समय 7 प्रकट नही होता है।

S: वास्तव में 7 प्रकट नहीं होता है क्योंकि पासा की किसी फलक पर 7 नहीं लिखा होता है।

अत: P(7 प्राप्ति) = $\frac{0}{800}$ = 0

T: ऐसी घटना जो घटित नही हो सकती उसे असंभव घटना कहते हैं। ‘असंभव घटना’ की प्रायिकता 0 होती है।

“1, 2, 3, 4. 5 या 6” प्राप्त करने की घटना की प्रायिकता क्या है?

S: अत: P(1, 2, 3, 4, 5, या 6) = 800/800 = 1

T: ऐसी घटना जो निश्चित तौर पर घटित होनी है, एक निश्चित घटना कहलाती है और “निश्चित घटना” की प्रायिकता 1 होती है।

इस प्रकार

घटना E की प्रायिकता = P(E) एक ऐसी संख्या है जो $0 \leq P(E) \leq 1$ है

अवलोकनात्मक प्रश्न

1. जैसा कि प्रायोगिक प्रायिकता की भूमिका पर चर्चा की गई, उसी तरह सैद्धान्तिक प्रायिकता की भूमिका पर चर्चा करें।

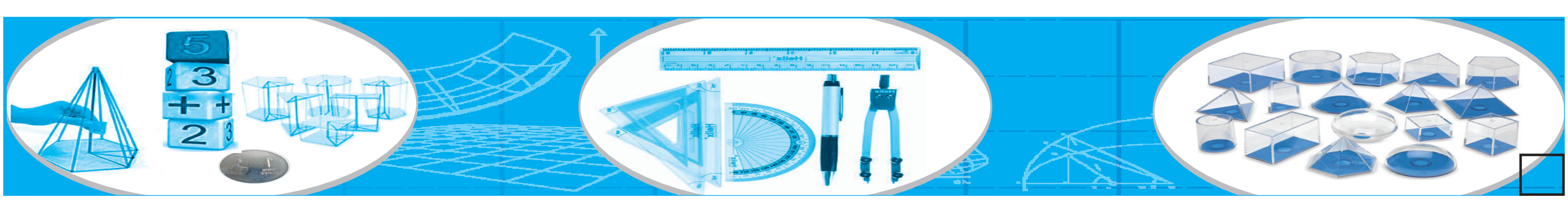
टिप्पणी :

1. एक वर्गीकृत बांरबारता बंटन में एक वर्ग ऐसा हो सकता है जिसकी बारंबारता 0 शून्य हो। इस स्थिति में, आयतचित्र खींचने में इस वर्ग पर बने आयत की लंबाई (ऊँचाई) 0 है अर्थात आयत वर्ग को निरूपित करने वाला क्षैतिज रेखा के अनुदिश एक रेखा खंड होगा।
2. विभिन्न चौड़ाईयों के वर्गो पर आयतचित्र खींचने की स्थिति में समायोजित बांरबारताओं को ज्ञात करने के लिए यह आवश्यक नहीं है कि हम वर्ग की न्यूनतम चौड़ाई को मानक बांरबारता लें। वास्तव में, यह दिए गए किसी भी वर्ग की चौड़ाई हो सकती है।
3. बहुलक सर्वोच्च बारंबारता का प्रेक्षण परिभाषित किया जाता है न कि सबसे बड़ा प्रेक्षण।
4. वर्गीकृत बांरबारता का माध्यक ज्ञात करने के लिए प्रयुक्त कल्पित माध्य विधि में यह आवश्यक नही है कि हम सबसे मध्य x_i को कल्पित माध्य लें। वास्तव मे यह कोई भी या x_i अन्य संख्या हो सकती है। परन्तु माध्य का परिकलन करने के लिए सबसे मध्य x_i को कल्पित माध्य लेना सुगम्य है।
5. वर्गीकृत बांरबारता बंटन का माध्य ज्ञात करने के लिए पग – विचलन विधि तभी लागू होती है जब सभी वर्ग समान चौड़ाई के हों।
6. पाठ्यपुस्तक में माध्यक की गणना के लिए "अपेक्षाकृत कम प्रकार के तोरण (ओजीव') पर चर्चा की गई है। इसी तरह "अपेक्षाकृत अधिक प्रकार के तोरण (ओजीव) से भी माध्यक की गणना की जा सकती है।
7. दिए गए कच्चे आँकड़े का माध्यक और आँकड़े को वर्गीकृत बांरबारता सारणी में बदल कर परिकलित माध्य विभिन्न हो सकते हैं। परन्तु कल्पित माध्य विधि, या प्रत्यक्ष विधि या पग विचलन विधि से परिकलित बांरबारता बंटन का माध्य समान होगा।
8. निश्चित दशा में, माध्यक, बहुलक और माध्य के बीच संबध, 3 माध्यक = बहुलक + 2 माध्य होता है। विद्यार्थियों को इन तीनो में दो को दिए जाने पर तीसरे को ज्ञात करने हेतु इस संबध के उपयोग को बढ़ावा नही देना चाहिए। अधिक जानकारी के लिए सांख्यिकी पर अन्य पुस्तक का संदर्भ दें।

5.5 भ्रांतियाँ

1. कभी – कभी छात्र विभिन्न चौड़ाईयों के वर्गो वाले आँकड़े के लिए उसी तरह आयतचित्र खींचते हैं जैसा कि वे एक समान चौड़ाई के वर्गो की समायोजित बांरबारता के बिना ज्ञात किए करते है। ऐसी स्थिति में दी गई बारंबारता के बदले समायोजित बांरबारता का उपयोग करना पड़ता है।
2. कुछ छात्र निम्नलिखित आँकड़े का आयतचित्र इस प्रभाव से खींचते हैं कि प्रथम स्तंभ सतत् वर्गो का है और दूसरा स्तंभ बारंबारता का है।

वर्ष	उत्पादन(टन में)
2000 – 01	350
2001 – 02	410
2002 – 03	720
2003 – 04	350
2004 – 05	300



लेकिन ऐसा नहीं है। वास्तव में, यह वर्गीकृत बारंबारता बंटन नहीं है। यद्यपि ऐसी स्थिति में हम दंडारेख खींच सकते हैं।

3. कुछ छात्र सोचते हैं कि समांतर माध्य या माध्य ही एक मात्र औसत होता है। ऐसा नही है, माध्यक और बहुलक भी औसत हैं और इसके अतिरिक्त कुछ अन्य भी औसत होते हैं जिसका अध्ययन वे उच्च कक्षाओं में करेंगे।
4. कुछ छात्र सोचते हैं कि संबध, 3 माध्यक = बहुलक + 2 माध्य सदैव सत्य है। वास्तव में यह कुछ विशेष दशा में ही सही होता है।

5.6 अभ्यास

(1) एक सर्वेक्षण में 40 मकानों के प्रत्येक मकान में रहने वाले लोगों की संख्या निम्नलिखित दर्ज है:

3	4	5	2	2	3	4	2	4	3
2	5	4	5	6	4	2	3	2	4
4	1	2	6	3	5	2	4	1	5
3	4	2	6	4	4	2	4	3	4

(i) निम्न सारणी को पूरा कीजिए

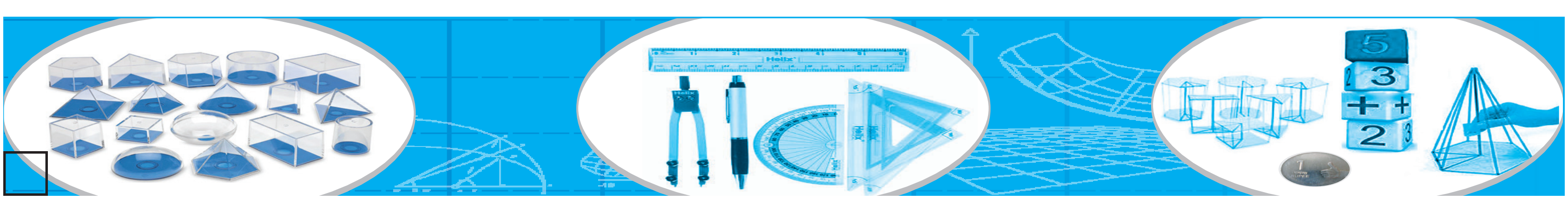
(ii) सारणीबद्ध उपरोक्त आँकड़े के लिए दंडारेख खींचिए

लोगों की संख्या	टैली चिन्ह	घरों की संख्या
1		
2		
3		
4		
5		
6		

(2) आँकड़े को निरूपित करने हेतु आयतचित्र खींचिए:

ऊँचाई (cm में)	बारंबारता
130 – 135	6
135 – 140	12
140 – 145	18
145 – 150	14
150 – 155	0
155 – 160	8
कुल	58

(संकेत : 150 – 155 पर खड़े आयत की उँचाई 0 होगी। इसका तात्पर्य है कि आयत एक रेखाखंड है।)



(3) निम्नलिखित बंटन के निरूपण के लिए आयतचित्र खींचिए।

लंबाई (cm में)	**बारंबारता**
26 – 30	4
31 – 35	10
36 – 40	18
41 – 45	13
46 – 50	5
कुल	**58**

(4) नीचे दी गई सारणी किसी विद्यालय के शिक्षकों की आयु को दर्शाती है:

आयु (वर्षों में)	20-30	30-35	35-40	40-45	45-60
बारंबारता	10	18	24	9	15

उपरोक्त आँकड़े को आयतचित्र द्वारा निरूपित कीजिए।

(5) एक प्रयोग में मापी गई पौधों की ऊँचाईया (cm) में मापी गई और परिणाम निम्न सारणी में संक्षिप्त रूप से दिए गए हैं:

लंबाई (cm में)	**बारंबारता**
0 – 5	20
5 – 10	40
10 – 15	35
15 – 20	25
20 – 25	50

(i) इस बंटन के लिए संचयी बारंबारता सारणी बनाइये।

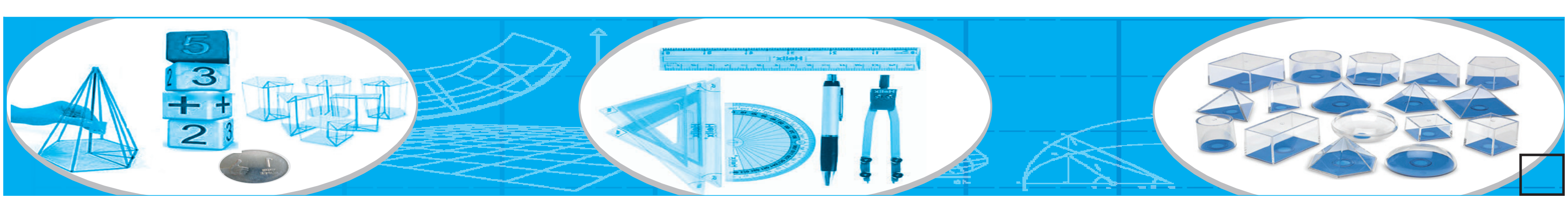
(ii) किस वर्ग अंतराल में माध्यक ऊँचाई पड़ती है?

(iii) माध्यक ऊँचाई ज्ञात कीजिए

(6) प्रश्न 5 में दिए गए वंटन का माध्य और बहुलक ज्ञात कीजिए।

(7) निम्नलिखित बंटन का माध्यक ज्ञात कीजिए:

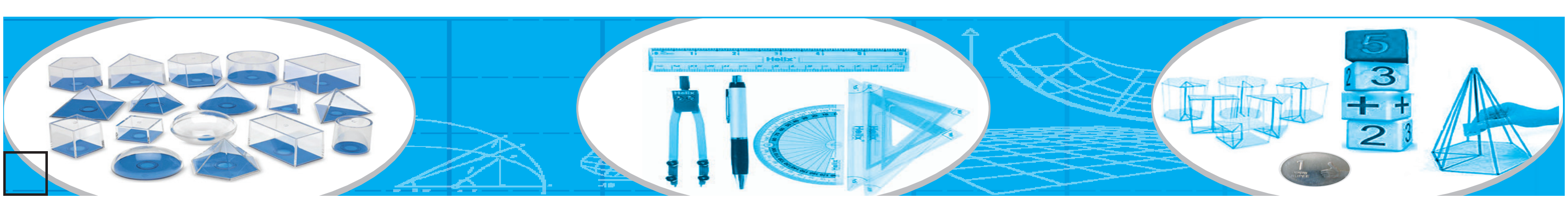
अंक	**बारंबारता**
6 – 15	4
16 – 25	14
26 – 35	18



36 – 45	5
46 – 55	8
56 – 65	4
66 – 75	2
कुल	**55**

(8) प्रश्न 7 में आँकड़े का माध्य ज्ञात कीजिए।

(9) प्रश्न 7 में आँकड़े का बहुलक ज्ञात कीजिए।



6

गणित में समस्या हल करना

6.1 भूमिका

हमारे दैनिक जीवन में, गणित एक बहुत महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। पूरे विश्व में, हमारे जीवन के लिए, गणितीय कौशल और उसके अनुप्रयोग एक अपरिहार्य साधन है। यह कहा जाता है, "गणित के क्षेत्र में जितनी उच्च् उपलब्धि होगी, उतनी ही अधिक राष्ट्र का विकास होगा।" पिछली कुछ शताब्दियों में हुई मानवीय उन्नति ने यह आवश्यक कर दिया है कि विविध प्रकृति की समस्याओं में गणित का अनुप्रयोग किया जाए जो पहले रीतियों और प्रथाओं के अंतर्गत आती थीं। इन दिनों मौलिक और जीवन विज्ञान के अतिरिक्त, सामाजिक विज्ञान, प्रबंधन और कामर्स में गणित अधिक तथा और अधिक उपयोग किया जा रहा है। इस कारण, गणित शिक्षण – अधिगम प्रक्रिया में,समस्या हल करने (समाधान) ने एक महत्वपूर्ण स्थान प्राप्त कर लिया है। अन्य अभिगमों(विधियों) के साथ ही, समस्या हल करने को भी गणित शिक्षण के लिए एक महत्वपूर्ण अभिगम समझा जाता है।

6.1.1 समस्या क्या है ?

व्यापक रूप में, एक समस्या को एक ऐसे उद्देश्य के वर्णन के रूप में स्पष्ट किया जा सकता है, जो तुरंत ही प्राप्त न किया जा सके तथा उस उद्देश्य की प्राप्ति के लिए एक उचित क्रिया करने की आवश्यकता हो। उदाहरणार्थ, यदि कोई व्यक्ति भूखा है, तो उसका उद्देश्य है कि वह भूख को मिटाए तथा क्रिया है कि ऐसे स्थान पर भोजन की खोज करे जहाँ उसे प्राप्त करने की संभावना हो। मान लीजिए कि कोई व्यक्ति किसी प्रतियोगात्मक परीक्षा में सफल होना चाहता है, तो इस उद्देश्य की प्राप्ति के लिए उचित क्रियाएँ है:

(i) उस पाठ्यक्रम को देखना,जिस पर वह परीक्षा आधारित है।

(ii) परीक्षा में आने वाले प्रश्नों के प्रकार का विश्लेषण करना।

(iii) उपरोक्त सूचनाओं के आधार पर परीक्षा के लिए तैयारी करना, इत्यादि।

जी.पोल्या(1981, पृष्ठ 117) के अनुसार, एक समस्या एक स्थिति है जिसमें एक व्यक्ति स्पष्ट, परंतु सरलता से प्राप्त न हो सकने वाले उद्देश्य की प्राप्ति के लिए, कुछ उचित क्रिया की सचेत रूप से खोज करता है तथा समस्या हल करने का अर्थ है कि क्रिया को ज्ञात करना।

गणित में भी, समस्या एक स्थिति है जिसके लिए बच्चे के पास एक तुरंत उत्तर या एक स्पष्ट गणित संक्रिया या उत्तर प्राप्त करने की विधि नही होती। दूसरी ओर, समस्या हल करने को एक ऐसी प्रक्रिया के रूप में माना जा सकता है जिसके द्वारा बच्चा कुछ पूर्व ज्ञात नियमों की खोज करता है, जिन्हें वह उस समस्या का हल प्राप्त करने में प्रयोग कर सकता है। यहाँ यह ध्यान रखा

जा सकता है कि एक समस्या को अनेक विधियों से हल किया जा सकता है तथा शिक्षक को चाहिए कि वह बच्चे को स्वयं उसी की ही विधि अपनाने के लिए प्रोत्साहित करे।

6.2 गणित में समस्याओं तथा समस्या हल करने का महत्व

आपने कुछ प्रसिद्ध गणितीय समस्याओं के बारे में अवश्य ही सुना होगा जिन्होंने अतीत काल में अनेक गणितज्ञों को उलझाए रखा था। उदाहरणार्थ:

1. पटरी और परकार की सहायता से कोण का समत्रिभाजन

इस संबंध में, यह याद रखना चाहिए कि पटरी पर किसी भी चिह्न को अंकित करने की अनुमति नहीं है। इसके लिए, निम्न समस्या पर विचार कीजिए:

संलग्न आकृति में, $OB = AB$ है, जहाँ B रेखाखंड AC

तथा C को केन्द्र और को त्रिज्या लेकर खींचे गए अर्धवृत्त का प्रतिच्छेदी विंदु है।

दर्शाइए कि $\angle y = \frac{1}{3}\angle x$ है।

हल: क्योंकि $AB = OB$ है, इसलिए $\angle BOA = \angle y$ है।

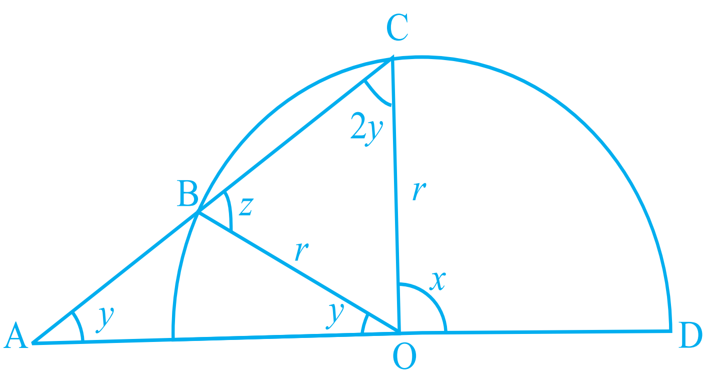
अत: $\angle z = 2\angle y$ है।

इसलिए,

$\angle BCO = \angle z = 2\angle y (OB = OC)$

अत: $\angle x = \angle y + 2\angle y = 3\angle y$

या, $\angle y = \frac{1}{3}\angle x$ है।



यह प्रसिद्ध आर्कमिड़ीज समस्या के रूप में विख्यात है। इससे आर्कमिड़ीज ने यह दावा किया कि यदि पटरी पर उन्हें दो चिह्न अंकित करने की अनुमति मिल जाए, तो वे दिए हुए कोण का समद्विभाजन कर सकते थे।

2. एक वृत्त का वर्ग करना

3. एक घन को दुगुना करना

4. यूक्लिड की पाँचवीं अभिधारणा

इसकी एक उपपत्ति ज्ञात करने के प्रयासों में, गणितज्ञ अयूक्लिडीय ज्यामितीयों की खोज कर सके।

5. अभाज्य संख्या आश्चर्य:

अभाज्य संख्याओं से संबद्ध बिना हल हुई कुछ प्राचीनतम समस्याओं में से एक अभाज्य संख्या आश्चर्य है। उदाहरण के लिए, कोई भी व्यक्ति एक दी हुई अभाज्य संख्या से अगली अभाज्य संख्या प्रदान करने के लिए कोई सूत्र या पद्धति लिखने में समर्थ नहीं हो पाया है। अभाज्य संख्याओं के बनाने की कोई विधि हो सकती है, परंतु अभी तक कोई भी ऐसा करने की एक क्रमबद्ध विधि नहीं ज्ञात कर पाया है। अभाज्य संख्याओं के बारे में एक अन्य आश्चर्य इस प्रश्न द्वारा पूछा जाता है: "क्या अभाज्य युग्मों की संख्या अपरिमित है?" एक अभाज्य युग्म अभाज्य संख्याओं का ऐसा

युग्म होता है जिनका अंतर 2 हो। उदाहरण के लिए, (3,5) (5, 7) (11,13) इत्यादि। कोई भी यह ज्ञात नही कर पाया है कि ऐसे कितने युग्म है अथवा इनको निर्धारित करने का कोई सूत्र है भी या नही। परंतु दूसरी ओर कोई यह भी सिद्ध नहीं कर पाया है कि ऐसी कोई संख्या है, जिसके आगे कोई अभाज्य युग्म नहीं है।

6. गोल्डबाक कनजैक्चर:

क्या प्रत्येक सम संख्या दो अभाज्य संख्याओं का योग होता है? यह एक अन्य गणितीय आश्चर्य है 1742 में, जर्मन गणितज्ञ सी. गोल्डबाक ने अपने मित्र स्विजरलेंड के महान गणितज्ञ लियोनार्ड ऑयलर (1707 -1783), को एक पत्र लिखा जिसमें उसने यह कनजैक्चर दिया कि 2 के अतिरिक्त प्रत्येक सम संख्या दो अभाज्य संख्याओं का योग होती है। यह एक रोचक कथन था जो उसके द्वारा जाँच की गई प्रत्येक सम संख्या के लिए सत्य था, पर वह उसे सिद्ध नहीं कर पाया कि वह प्रत्येक सम संख्या के लिए सत्य कथन था।

यदि कुछ सम संख्याओं को लेकर प्रयास करें, तो आप ज्ञात करेंगे कि यह सदैव कार्य कर जाता है, उदाहरणार्थ, 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, इत्यादि। ऐसी कोई सम संख्या ज्ञात नहीं हुई जो दो अभाज्य संख्याओं का योग नहीं है। परंतु इसकी कोई उपपत्ति नहीं है कि प्रत्येक सम संख्या दो अभाज्य संख्याओं का योग होती है। यदि आप एक ऐसी सम संख्या प्राप्त कर पाएँगे जो दो अभाज्य संख्याओं का योग नहीं हो, तो समस्या हल हो जाएगी। क्योंकि इसको एक सरल समस्या समझते हुए,कोई तार्किक उपपत्ति ज्ञात नहीं की गई है, इसलिए यह अभी भी गणित के आश्चर्यो में से एक है।

7. विषम संपूर्ण संख्या आश्चर्य :

प्राचीन यूनानियों ने कुछ संख्याओं को संपूर्ण माना। संपूर्ण संख्याएँ ऐसी संख्याएँ हैं, जो अपने विभाजकों के योग के बराबर होती हैं। संख्या 6 एक ऐसी ही संख्या है, क्योंकि $6 = 1 + 2 + 3$ है। एक अन्य संपूर्ण संख्या 28 है, क्योंकि $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ है। 28 के बाद की अगली संपूर्ण संख्याएँ 496 है। अन्य संपूर्ण संख्याएँ ज्ञात की गई हैं तथा ये सभी सम संख्याएँ हैं। कोई भी एक विषम संपूर्ण संख्या नहीं ज्ञात कर पाया है।साथ ही, यह भी कोई सिद्ध नहीं कर पाया है कि प्रत्येक संपूर्ण संख्या सम होनी चाहिए।

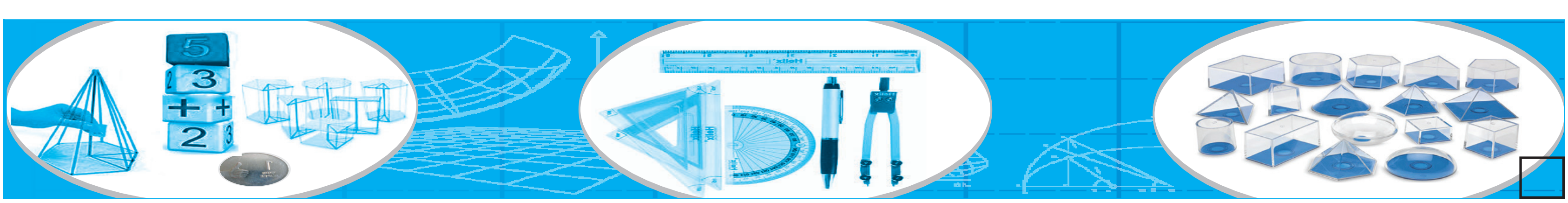
8. गोलों को कैसे पैक किया जाए:

एक ज्यामितीय समस्या जो अभी भी हल नहीं हो पाई है, उसमें पिंग – पाँग गेंदों जैसे गोलों को पैक करने से संबद्ध है। एक डिब्बे में गोलों को किस प्रकार पैक किया जाए कि वे न्यूनतम स्थान घेरें? यह एक आयत में वृत्तों को खींचने की समस्या जैसी है।

9. चार रंगों की मानचित्र समस्या :

स्थान - विज्ञान के क्षेत्र में बिना हल हुई समस्याएँ हैं। इनमें से एक चार रंगों की मानचित्र समस्या है। एक मानचित्र बनाने के लिए कितने विभिन्न रंगों की आवश्यकता है ताकि उभयनिष्ठ सीमाओं वाले देश विभिन्न रंगों से रंगे जाएँ? यह मानचित्र बनाने वालों तथा गणितज्ञों के लिए एक वास्तविक आश्चर्य है। वे ऐसा कोई मानचित्र खींच नहीं पाए हैं जिसमें चार से अधिक रंगों की आवश्यकता हो। परंतु इसके साथ ही वे यह भी सिद्ध नही कर पाए हैं कि किसी भी संभव मानचित्र के लिए चार रंग ही पर्याप्त हैं। फिर भी, इस समस्या की एक प्रोद्योगिकीय उपपत्ति उपलब्ध है तथा इसे एक गणितीय उपपत्ति मान लिया गया है।

प्रतिदिन गणितज्ञ और वैज्ञानिक ऐसी समस्याओं पर कार्य कर रहे हैं, जो बिना हल हुई प्रतीत होती हैं। इनमें से कुछ का उत्तर हो सकता है कि इनका हल असंभव है। कुछ अन्य के लिए उत्तर नए विचार हो सकते हैं, जिनसे गणित की नई दुनिया खुल सकती है। हो सकता है कि आप इन समस्याओं में से किसी का हल प्राप्त करके प्रसिद्ध हो जाएँ।



6.3 समस्याओं का वर्गीकरण

किसी समस्या को हल करने से पहले, बच्चे से उसके द्वारा हल की जाने वाली समस्या के प्रकार को देखने के लिए कहा जाना चाहिए तथा उसी के अनुसार उसके हल करने के लिए उचित क्रिया चुनने को कहा जाए। गणित में, सामान्य रूप से समस्याएँ निम्न प्रकार की होती है:

(i) सरल करना

(ii) सत्यापित करना

(iii) ज्ञात करना

(iv) समीकरण बनाना और उसे हल करना

(v) किसी कथन को सिद्ध करना (या दर्शाना)

बच्चों को प्रोत्साहित किया जाना चाहिए कि वे निम्नलिखित प्रश्नों को स्वंय से पूछ कर समस्याओं पर चर्चा करें तथा उनका विश्लेषण करे:

(i) क्या सूचना दी हुई है ?

(ii) क्या किया जाना है ?

(iii) क्या आपको किसी ऐसी सूचना की आवश्यकता है, जो नहीं दी हुई है ?

(iv) क्या समस्या में ऐसी सूचना है जिसका उपयोग नहीं किया जाएगा ?

(v) समस्या को हल करने के लिए क्या किया जाना है ?

(vi) समस्या को हल करने के लिए आपके पास कौन से तथ्य ज्ञात हैं ?

(vii) क्या समस्या हल करने के लिए आपको एक आरेख खींचने की आवश्यकता है ?

(viii) क्या समस्या को हल करने के लिए इसे समीकरण या असमीकरण के रूप में बदलने की आवश्यकता है ?

(ix) क्या आप उत्तर का आकलन कर सकते है तथा प्राप्त हल की विश्वसनीयता की जाँच कर सकते है?

उपरोक्त चिंतन, समस्या हल करने में सहायता करता है, परन्तु यह उसके हल का भाग नहीं बनता है। और अधिक स्पष्ट करने के लिए, आप कुछ उदाहरण लेकर समस्या हल करने की उचित प्रक्रिया को समझा सकते हैं। परंतु यह ध्यान रखना चाहिए कि इस प्रक्रिया में समय अधिक लगता है तथा कभी –कभी हम अपने इन प्रयासों मे असफल भी रह सकते हैं।

6.3.1 समस्या हल करने की तकनीकों के लिए कुछ उदाहरण

समस्या 1: किसी समबाहु त्रिभुज ABC के परिवृत्त के लद्यु चाप BC पर स्थित M कोई बिंदु है। सिद्ध कीजिए कि $AM = BM + CM$ है।

समस्या 2: एक आयताकार पट्टी की लंबाई उसकी चौड़ाई की दुगुनी है। इसे तीन टुकड़ो में किस प्रकार काटा जाए कि इन्हें पुनर्व्यवस्थित करने पर एक वर्ग प्राप्तहो सके ?

समस्या 3 : $x^6 + 5x^3 + 8$ के गुणनखंड कीजिए।

समस्या 4: एक राजा ने अपने स्वर्ण के सिक्कों को एक वर्ग के रूप में व्यवस्थित किया तथा सुरक्षा गार्ड को यह कह कर महल से चला गया कि इनसे किसी प्रकार की छेड़ – छाड़ नहीं की जाए। अपने लौटने पर राजा ने पाया कि

महल में केवल दो ही सिक्के बचे हैं। गार्ड ने उसे बताया कि तीन चोरों ने उस पर हमला किया तथा दो सिक्कों को छोड़ कर शेष सभी सिक्कों को वे ले गए, क्योंकि इन दो सिक्कों को वे तीनों चोर आपस में बराबर – बराबर नहीं बाँट सके। राजा ने झूठ बोलने पर गार्ड को दंडित किया। जाँच कीजिए कि राजा को किस प्रकार ज्ञात हुआ कि गार्ड झूठ बोल रहा है।

समस्या 5: सिद्ध कीजिए कि एक समकोण त्रिभुज के कर्ण के मध्य – बिन्दु को उसके सम्मुख शीर्ष से मिलाने पर बना रेखाखंड कर्ण का आधा होता है।

समस्या 6: किसी त्रिभुज की भुजाओं की लंबाइयाँ 13cm, 14cm और 17cm हैं। 13cm और 14cm वाली दो भुजाओं को स्पर्श करने वाले वृत्त का केन्द्र सबसे लंबी भुजा पर स्थित है। इस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

समस्या 7: एक व्यक्ति एक फलों के बाग में प्रवेश करता है, जिसके चार द्वार हैं तथा वहाँ से कुछ सेब तोड़ लेता है। बाग से बाहर आते समय, उसने पहले द्वार पर उन सेबों के आधे और 1 सेब दिया, दूसरे द्वार पर शेष सेबों के आधे और 1 सेब दिया, तथा ऐसी ही आगे अंतिम द्वार तक करता रहा। अंत में, उसके पास केवल एक सेब बचा। उसने कुल कितने सेब तोड़े थे ?

समस्या 8: एक त्रिभुज की रचना कीजिए, जब उसकी तीनों मध्यिकाओं की लंबाइयाँ दी हुई हैं।

6.3.2 समस्या हल करना और सृजनात्मकता

अब तक, अपने अवश्य ही यह अनुभव कर लिया होगा कि समस्या हल करने की प्रक्रिया कितनी रोचक और सृजनात्मक है। आपने सुना होगा कि पाइथागोरस प्रमेय को अनेक विधियों से सिद्ध किया जा सकता है। इसी प्रकार, ऐसी ही समस्याओं को एकत्रित कीजिए, जिन्हें अनेक विधियों से हल किया जा सकता है। शिक्षक के रूप में, आप बच्चों को समस्या हल करने दीजिए और उन्हे गलतियाँ भी करने दीजिए, ताकि उनका सीखना अधिक स्थायी हो पाए।

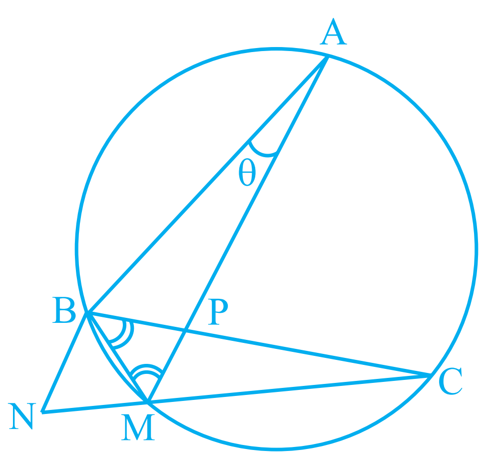
संकेत : समस्याएँ 1- 8

समस्या 1: सिद्ध करना है कि $AM = BM + CM$ है।

रचना : CM को N तक बढ़ाइए, ताकि $BM = MN$ हो। BN को मिलाइए।

उपपत्ति: मान लीजिए कि $\angle BAM = \theta$ है। तब,

$\angle MBC = \angle MAC = 60^\circ - \theta$ है।



अतः, $\angle ABM = 60^\circ + 60^\circ - \theta \ = 120^\circ - \theta$

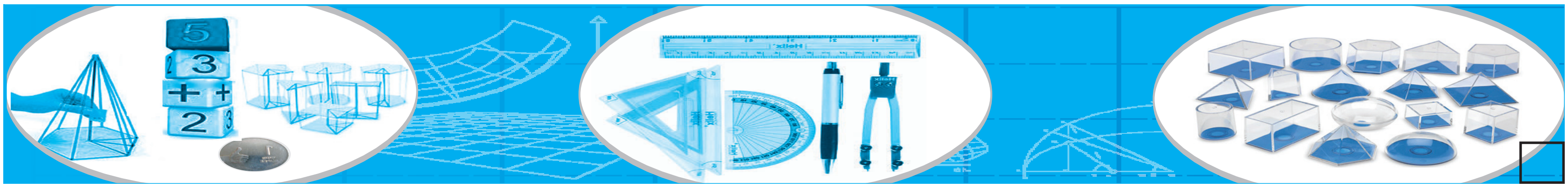
साथ ही, $\angle AMC = \angle ABC = 60^\circ$

$\angle AMB = \angle ACB = 60^\circ$

अतः, $\angle BMN = 180^\circ - (60^\circ - 60^\circ)$

$= 60^\circ$

क्योंकि $BM = NM$ है, इसलिए ΔBMN एक समबाहु त्रिभुज है, अर्थात् $MB = NB$ है।



ΔABM और ΔCBN में, $AB = BC, BM = BN$ तथा $\angle ABM = \angle CBN = 120^\circ$ है।

अतः, $\Delta ABM \cong \Delta CBN (SAS)$

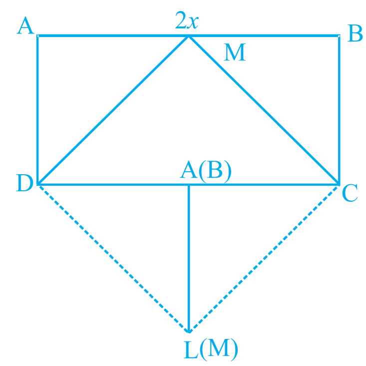
इसलिए, $AM = CN = CM + MN = CM + BM$ (इकाई 3 भी देखिए)

समस्या 2: आयत का क्षेत्रफल = $x \times 2x$

इसलिए, वर्ग की भुजा = $\sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}$

MC और MD को मिलाइए।

अतः $MC = MD = x\sqrt{2}$ तथा $\angle DMC = 90^\circ$ है। इससे सुझाव मिलता है कि आयत को MC और MD के अनुदिश काट कर तीन टुकड़े कीजिए। तथा आकृति में दर्शाए अनुसार इन त्रिभुजों को लगाईए।



समस्या 3:

$$x^6 + 5x^3 + 8$$

$$\begin{aligned} x^6 + 8 + 5x^3 &= (x^2+2)^3 - 6x^4 - 12x^2 + 5x^3 \\ &= [(x^2+2)^3 - x^3] - 6x^2(x^2 - x + 2) \\ &= (x^2+2-x)[(x^2+2)^2 + x^2 + x(x^2+2] - 6x^2(x^2-x+2) \\ &= (x^2+2-x)(x^4+x^3+5x^2+2x+4-6x^2) \\ &= (x^2+2-x)(x^4+x^3-x^2+2x+4) \end{aligned}$$

समस्या 4: किसी भी पूर्णांक n के लिए, जब n^2 को 3 से भाग दिया जाता है, तो शेषफल 0 या 1 होगा, परंतु 2 नहीं होगा।

समस्या 5: मानक प्रमेय

समस्या 6: BO को मिलाइए।

ΔABO का क्षेत्रफल

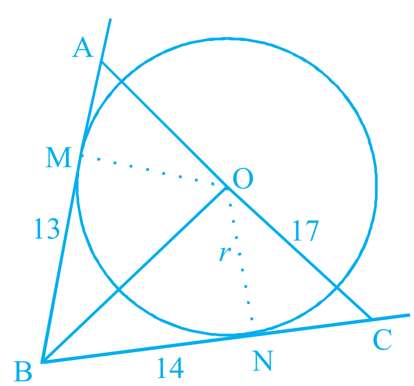
ΔBCO का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 27 \times \pi cm^2$

अतः ΔABC का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2} \times 27 \times \pi cm^2$

ΔABC का क्षेत्रफल $= \sqrt{22 \times 9 \times 8 \times 5}$

$= 12\sqrt{55} cm^2$

अतः $= \frac{2}{27} \times 12\sqrt{55} = \frac{8}{9}\sqrt{55} cm$



समस्या 7: मान लीजिए कि सेबों की संख्या x है। तब, पहले द्वार का पार करने के बाद,

शेष सेब $= \frac{x}{2} - 1 = \frac{x-2}{2}$

दूसरे द्वार को पार करने के बाद, शेष सेब $= \dfrac{\dfrac{x-2}{2}}{2} - 1 = \dfrac{x-6}{4}$

तीसरे द्वार को पार करने के बाद शेष सेब $= \dfrac{\dfrac{x-6}{4}}{2} - 1 = \dfrac{x-14}{8}$

चौथे द्वार को पार करने के बाद शेष सेब $= \dfrac{\dfrac{x-14}{8}}{2} - 1 = \dfrac{x-30}{16}$

अर्थात् $\dfrac{x-30}{16} = 1$ है।

अर्थात् $x = 30 + 16 = 46$ है।

यदि द्वारों की संख्या है n तथा अंतिम द्वार पर शेष बचे सेब 1 है, तो $x = 2^{n+1} + 2^{n} - 2$ है।

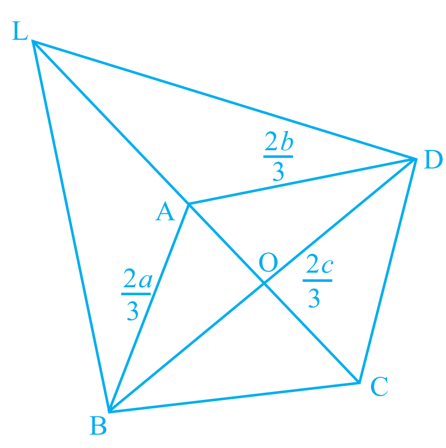
समस्या 8:

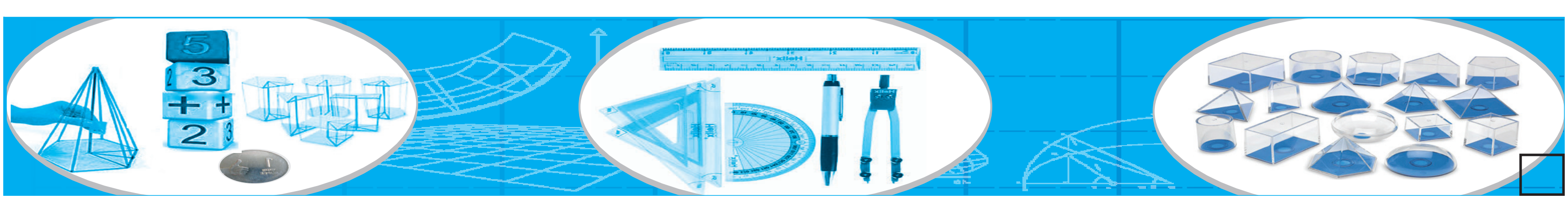
रचना : मान लीजिए कि माध्यिकाओं की लंबाईयाँ a, b और c हैं। एक समांतर चतुर्भुज $ABCD$ की रचना की किजिए

जिसकी दो भुजाएँ AB और AD की लंबाईयाँ क्रमश: $\dfrac{2a}{3}$ और $\dfrac{2b}{3}$ हैं तथा विकर्ण $AC = \dfrac{2c}{3}$ है।

$AL = 2AO$ बनाइए।

$\Delta\ LBD$ ही वाँछित त्रिभुज है।





7

शैक्षिक मूल्यांकन की अवधारणा

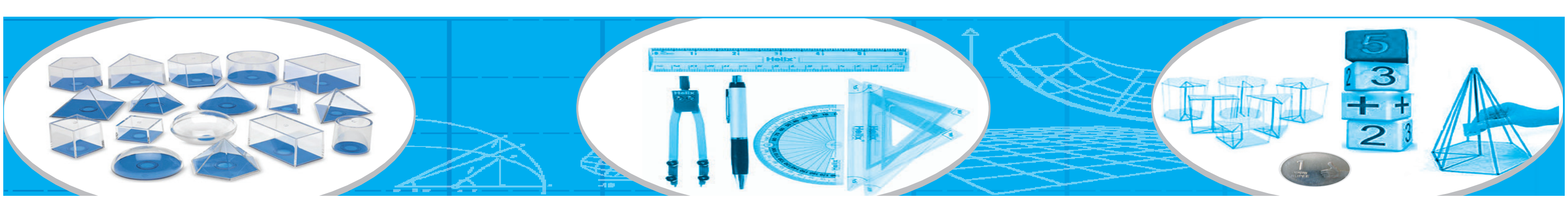
7.1 भूमिका

शैक्षिक मूल्यांकन अति महत्वपूर्ण है क्योंकि इसमें शैक्षिक प्रक्रिया की कुल अविधि में, संपूर्ण समाज पर काफी प्रभाव डालने की क्षमता है। किसी भी शैक्षिक पद्धति की पात्रता उसके उत्पादों द्वारा सक्षमता और श्रेष्टता के पदों में दर्शाई गई मानक उप-लब्धियों पर निर्भर करती है। इससे यह प्रदर्शित होता है कि शिक्षा की गुणवत्ता प्रत्यक्ष रूप से मूल्यांकन की गुणवत्ता के साथ जुड़ी हुई है। हमारे देश में, विभिन्न विद्यालयी स्तरों पर मूल्यांकन पद्धति से संबंधित दृश्य एक उदासीन चित्र प्रस्तुत करता है, क्योंकि यह अनेक कमियों / दोषों से ग्रस्त है। विभिन्न शिक्षा आयोग और समितियों ने इन मुद्दों को उठाया है तथा इन कमियों को दूर करने के उपायों के लिए अनेक प्रकारों के सुझाव दिए। परंन्तु अभी तक इस दिशा में कुछ अधिक ठोस कार्य नहीं हो पाया है। इस स्थिति के अनेक कारणों में से एक कारण मूल्याकंन के संदर्भ में अवधारणात्मक समझ और प्रक्रियात्मक जानकारी का अभाव है। इससे आंतरिक और बाहरी दोनों परीक्षाओं में अव्यवस्थित ढंग से मूल्यांकन किया जाने लगा तथा वाँछित उद्देश्य पूरा करने के स्थान पर इस विधि ने गड़बड़ी (या कुव्यवस्था) उत्पन्न कर दी है। इनके अतिरिक्त बाहरी परीक्षा में अनेक अन्य कमियाँ है जो विनाशकारी है तथा, इसी कारण अधिगम की गुणवत्ता की वृद्धि में अवरोध उत्पन्न करती हैं। शिक्षा की गुणवत्ता को ऊपर उठाने के लिए यह आवश्यक है कि मूल्यांकन के घटक को सुढ़ढ़ बनाया जाए।

7.2 शैक्षिक मूल्यांकन की अवधारणा

मूल्यांकन एक बहुत व्यापक पद है जिसमें, किसी वस्तु, व्यक्ति, संस्था, कार्यालय की स्थिति, घटना, प्रवृत्ति, इत्यादि का मूल्यांकन करना सम्मिलित होता है। परंतु शैक्षिक मूल्यांकन में, विद्यार्थियों का मूल्यांकन किया जाता है, जिसमें विद्यार्थियों के बौद्धिक, सामाजिक और भावनात्मक विकास के पदों में उनके व्यक्तित्व विकास क्षेत्रों में प्रदर्शन का आकलन करना सम्मिलित होता है, जबकि उन्हें कक्षा में शिक्षण की प्रक्रियाओं के माध्यम से अधिगम अनुभव पहले से ही प्रदान किए जा चुके हैं। पाठ्यचर्या सामग्री के शिक्षण की गुणवत्ता के अतिरिक्त अन्य कारक, जैसे शैक्षिक प्रौद्योगिकी, विद्यालयी अवसंरचना (इन्फ्रास्ट्रक्चर) तथा सामाजिक समर्थन भी हैं, जो विद्यार्थी के अधिगम पर प्रभाव डालते हैं तथा उसके अनुभवों में संवर्धन करते हैं।

प्राय: मूल्यांकन की मापन शब्द के साथ भ्रांति होती है तथा दोनों को एक दूसरे के लिए पर्यायवाची के रूप में प्रयोग किया जाता है। परन्तु ये दोनों समान नहीं हैं। मापन शब्द का अर्थ है एक विशिष्ट पैमाने पर विद्यार्थियों के प्रदर्शन को मापने के लिए प्रयुक्त होता है। मापन का पैटर्न जो अधिकतर हमारी मूल्यांकन पद्धति में अपनाया जाता है वह 0-100 अंकों के पैमाने पर अंक देने से संबधित है। इसमें (सफल-असफल) पद्धति भी सम्मिलित है, जिसमें वे सभी विद्यार्थी जो एक विशेष प्रतिशत



अंक या उससे अधिक अंक प्राप्त कर लेते हैं पास घोषित कर दिए जाते हैं तथा उससे कम अंक प्राप्त करने वाले फेल कहे जाते है। यह पैमाना एक ऐसा माप है, जो एक टेस्ट या परीक्षा में विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त किए गए अंकों के आधार पर उनका वर्गीकरण करती है। अत: मापन कृत्रिम वर्गीकरण के आधार पर शिक्षार्थियों के प्रदर्शन का मात्रात्मक विवरण प्रदान करता है। इसमें मूल्य निर्णय सम्मिलित नहीं होता और इस प्रकार यह विद्यार्थी के प्रदर्शन का एक खंडित या अपूर्ण चित्र प्रस्तुत करता है। इसके साथ ही, ये सभी पहलू केवल बौद्धिक वृद्धि से जुड़े होते हैं।

दूसरी ओर, मूल्यांकन मापन की तुलना में एक बृहत शब्द- है तथा इसमें प्रदर्शन के गुणात्मक और मात्रात्मक दोनों विवरण तथा मूल्य निर्णय सम्मिलित होते हैं। मात्रात्मक विवरण के संदर्भ में, जैसे कि पहले चर्चा की गई है, एक पैमाने पर मापन का प्रयोग किया जाता है तथा अंक दे दिए जाते हैं। गुणात्मक विवरण के लिए, विद्यार्थी द्वारा प्राप्त किए गए अंकों का स्वंय उसके, समूह के तथा कुछ अन्य कसौटियों के संदर्भ में **निर्वचन** किया जाता है। मूल्यांकन में, व्यक्तित्व विकास के सभी क्षेत्रों से संबंधित व्यवहारों की वाँछनीयता के संदर्भ में मूल्य निर्णय भी सम्मिलित होते हैं। ग्रोनलुंद (1981) ने मूल्यांकन और मापन के बीच में संबंध इस प्रकार दिया है : -

मापन- मात्रात्मक विवरण

मूल्यांकन- मात्रात्मक विवरण (मापन) (और/अथवा)- गुणात्मक विवरण के साथ-साथ मूल्य निर्णय।

इस प्रकार, मूल्यांकन निश्चिति मापन पर आधारित हो भी सकता है या नहीं भी हो सकता है और यह साधारण गुणात्मक अंक से कहीं आगे जा सकता है।

मूल्यांकन को विभिन्न शिक्षाविदों द्वारा निम्न रूप में भी परिभाषित किया गया है : -

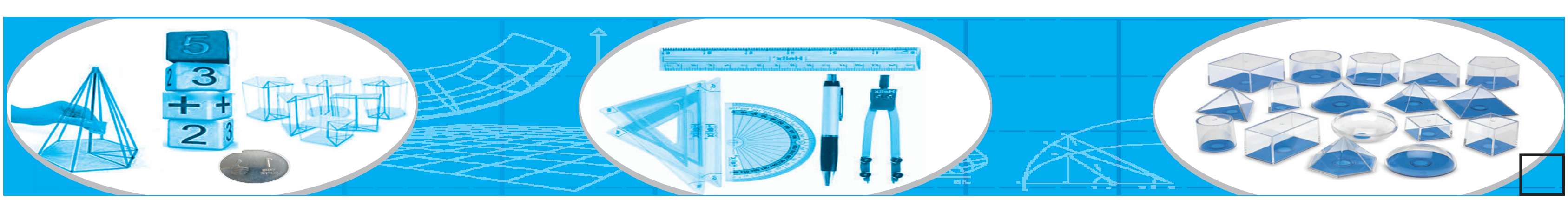
टिवो (1995) के अनुसार, "पद मूल्यांकन में; घटनाओं, व्यवहारों, वस्तुओं, प्राचलों या चरों के मात्रात्मक और गुणात्मक दोनों विवरण सम्मिलित होते हैं तथा साथ ही वर्णित वस्तुओं या घटनाओं के मूल्य निर्णयों का भी वर्णन होता है।" आर. डब्लू टाइलर (1950) ने मूल्यांकन को "शिक्षार्थियों द्वारा शैक्षिक उद्देश्य किस स्तर (मात्रा) तक प्राप्त कर लिए है उसके निर्धारण की एक क्रमबद्ध प्रक्रिया के रूप में परिभाषित किया है।"

मूल्यांकन की सबसे अधिक विस्तृत परिभाषा सी.ई.वीवाई (1977) द्वारा प्रदान की गई है, जिसने मूल्यांकन की व्याख्या कार्य की दृष्टि के साथ मूल्य के निर्णय की प्रक्रिया के एक अंग के रूप में अधिगम के प्रमाण के क्रमबद्ध संग्रह और विवेचन के रूप में की।

उपर्युक्त निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि मूल्यांकन शैक्षिक उद्देश्यों के पद्दों में विद्यार्थी की उपलब्धि या विकास के बारे में प्रमाण संग्रह करने की एक प्रक्रिया है। प्रमाणों के आधार पर निश्चित किया जाता है तथा निर्णय लिए जाते है। अत: मूल्यांकन के निम्न चार घटक हैं :

- सूचना एकत्रीकरण
- सूचना का निर्वचन
- निश्चय करना तथा
- निर्णय लेना

सूचना एकत्रीकरण का तात्पर्य है कक्षा में पारस्परिक संवादों के दौरान मौखिक प्रश्नों के उत्तरों, समूह क्रियाकलापों में समूह के अन्य सदस्यों के साथ शिक्षार्थी की पारस्परिक क्रियाओं का प्रेक्षण करके, टेस्ट देकर और उत्तरलिपियों में अंक देने के माध्यम से, एक विशिष्ट विषय में शिक्षार्थी के प्रदर्शन से संबंधित होता है। सामाजिक और वैयक्तिक गुणों के संदर्भ में, पहचान किए गए गुणों से संबंधित व्यवहार सूचकों के प्रेक्षण द्वारा, प्रमाण एकत्रित किए जा सकते हैं। जहाँ तक सह-शैक्षिक क्षेत्रों जैसे कि चित्रकारी (ड्राइंग), नृत्यत, नाटक (ड्रामा) और संगीत, आदि का संबंध है, प्रमाणों को प्रेक्षणों और लिखित टेस्ट दोनों से प्राप्त किया जा सकता है।



सूचना एकत्रित करने के बाद, प्रमाणों का विश्लेषण किया जाता है तथा शिक्षार्थियों के अधिगम की गति और साथ ही अधिगम के स्तर के संबध में निर्णय लिए जाते हैं। प्रमाणों का विश्लेषण तीन संदर्भ बिन्दुओं के पदों में किया जाता है। पहला बिंन्दु शिक्षार्थी के पिछले प्रदर्शन से संबधित होता है, अर्थात उसने अपनी उपलब्धि में सुधार किया है अथवा उसमें गिरावट आई है। दूसरा बिन्दु उसकी संपूर्ण कक्षा के समूह साथियों के प्रदर्शन के संदर्भ में स्वंय उसकी स्थिति से होता है। तीसरी बिंन्दु शिक्षक द्वारा निर्धारित कसौटियों से संबधित होता है, जो यह है कि वह शिक्षार्थी दिए हुए सभी प्रश्नों को सफलता-पूर्वक कर पाया अथवा वह केवल उसका कुछ भाग ही कर पाया। विश्लेषण से यह निर्णय लिया जा सकता है कि अधिगम प्रभावी रूप से हुआ है या नहीं।

निर्णय लेना मूल्यांकन प्रक्रिया का अगला चरण है। इन निश्चयों के आधार पर अंक अथवा ग्रेड़ प्रदान करने के रूप में निर्णय लिया जा सकता है। रिर्पोट कार्ड या प्रमाण पत्रों इत्यादि के माध्यम से इस निर्णय को शिक्षार्थी और माता-पिता को सूचित किया जा सकता है।

कुछ अन्य संबधित पद

मूल्यांकन से जुड़े हुए, कुछ संबधित पद है, जिन्हें समझने की आवश्यकता है, अन्य था गलत फहमियाँ जारी रहती हैं। नीचे दिए अनुसार संबधित पद स्पष्ट किए जा रहे हैं:

परीक्षा

यह एक समय अवधि के अंत में शिक्षार्थी की उपलब्धि के बारे में प्रमाण एकत्रित करने की प्रक्रिया है, जबकि अधिगम प्रक्रिया पहले हो चुकी है। अत: एक परीक्षा में अनेक टेस्टों को विकसित करना, उन्हें शिक्षार्थियों को करने के लिए देना और फिर उत्तरलिपियों पर अंक देना या विद्यार्थियों की उपलब्धियों को रिपोर्ट करने के लिए ग्रेड़ देना सम्मिलित होता है।

टेस्ट

टेस्ट विद्यार्थियों के ज्ञान, समझ, अभिवृत्ति और अभिरूचि, इत्यादि को ज्ञात करने के लिए, एक साधन है जिसमें अनेक प्रश्न होते हैं। यह टेस्ट पूर्व निर्धारित उदेश्यों के संग्रह (सेट) पर आधारित होता है।

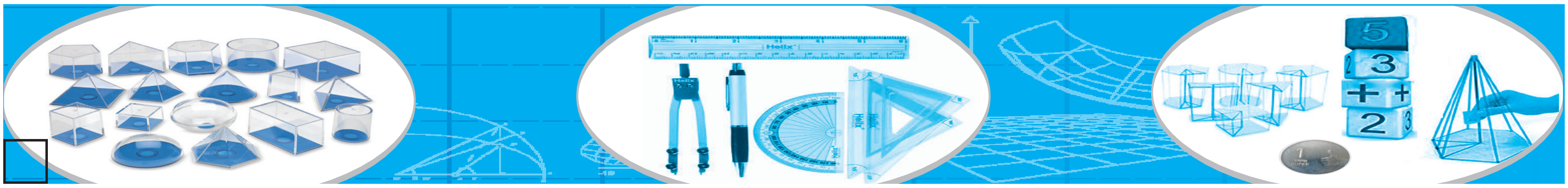
आकलन

आकलन, अधिगम के विभिन्न पहलुओं, उदाहरणार्थ ज्ञान, कौशल, दृष्टिकोण, इत्यादि में शिक्षार्थियों के विकास के स्तर के मूल्यांकन की प्रक्रिया है । इसी कारण, आकलन के बाद प्रदर्शन में सुधार के लिए सुझाव दिए जाते हैं। यह गुण या मात्रा दोनों पदों में किया जा सकता है। ब्रितानवी साहित्य में, आकलन शब्द का प्रयोग प्राय: अमरीकी शब्द मूल्यांकन के पर्याय के रूप में ही किया जाता है (नावो- 1995)।

7.3 शिक्षण- अधिगम में मूल्यांकन

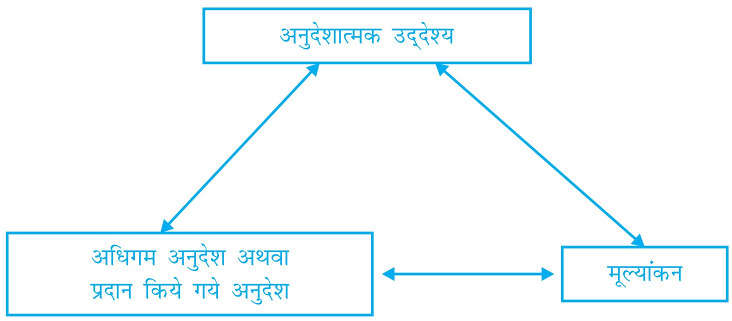
मूल्यांकन वह पद है जो वर्तमान प्रदर्शनों की गुणवत्ता के स्तर के निर्धारण की व्याख्या करने के लिए प्रयुक्त किया जाता है। मूल्यांकन प्रक्रम में सिर्फ गुणवत्ता के वास्तविक स्तर पर ही बल दिया जाता है। जिसमें अभिरूचि नहीं होती कि वह स्तर क्यों प्राप्त हुआ। मूल्यांकन की रिपोर्ट केवल गुणवत्ता के स्तर और उसके संभावित परिणामों के बारे में बताती है। इसमें प्राय: आगे के सुधार हेतु कोई सुझाव प्रदान नहीं किए जाते हैं। यद्यपि आकलन और मूल्यांकन के विभिन्न उद्देश्य हैं, परंन्तु दोनों प्रक्रिया एक जैसे चरण संबद्ध होते हैं।

मूल्यांकन किसी भी शिक्षण–अधिगम का एक अभिन्न अंग होता है। जब भी कक्षा में एक प्रश्न पूछा जाता है और एक विद्यार्थी द्वारा उसका उत्तर दिया जाता है तथा इस उत्तर की शिक्षण द्वारा जाँच की जाती है, तब मूल्यांकन हो जाता है। इस



प्रकार, शिक्षण और मूल्यांकन एक दूसरे के साथ मिल कर चलते हैं। वस्तुत: बिना मूल्यांकन के, शिक्षण–अधिगम संभव नहीं है।

शिक्षण और मूल्यांकन दोनों अनुदेशात्मक उद्देश्यों पर आधरित होते हैं, जो उन्हें दिशा प्रदान करते हैं। अनुदेशात्मक उद्देश्य वे वाँछनीय व्यवहार है; जिन्हें अधिगम अनुभवों के माध्यम से विद्यार्थियों में विकसित किया जाना होता है। ये पाठ्यक्रम, अनुदेशात्मक सामग्री तथा शिक्षक द्वारा व्यवस्थित अधिगम क्रियाकलापों के रूप में बनाए जाते हैं। अधिगम क्रियाकलाप उद्देश्य प्राप्त करने के लिए किए जाते हैं तथा मूल्यांकन यह देखने के लिए किया जाता है कि क्या अनुदेशात्मक उद्देश्य प्राप्त हुए हैं तथा किस स्तर तक प्राप्त हुए हैं। किसी शिक्षण के कार्यक्रम में उद्देश्यों, अनुदेशात्मक प्रक्रिया अथवा अधिगम अनुभवों तथा मूल्यांकन को अधिक स्पष्ट रूप से निम्न आरेख द्वारा व्यक्त किया जा सकता है:



उपर्युक्त आरेख यह स्पष्ट करता है कि ये तीनों घटक शिक्षण, अधिगम और मूल्यांकन एक एकीकृत नेटवर्क बनाते है, जिसमें प्रत्येक घटक दूसरे पर निर्भर रहता है। इस प्रकार, मूल्यांकन के द्वारा शिक्षक न केवल यह आकलन करता है कि विद्यार्थी ने उद्देश्यों को किस स्तर तक प्राप्त किया है, अपितु इन उद्देश्यों की प्राप्ति के लिए प्रयुक्त शिक्षण युक्ति, जैसे कि विधियाँ, साधन और सामग्री की प्रभावशीलता की भी जाँच करता है।

7.4 मूल्यांकन के प्रकार

मूल्यांकन शिक्षार्थी के सर्वांगीण विकास का एक गुणात्मक तथा साथ ही एक मात्रात्मक विवरण होता है, जिसमें उसके भौतिक, सामाजिक, नैतिक और बौद्धिक विकास तथा साथ ही उसके कौशल, सामर्थ्य, अभिवृत्ति और अभिरूचियां सम्मिलित हैं। अत: शैक्षिक मूल्यांकन एक सतत्, व्यापक, सभी – सम्मिलित तथा स्थानिक स्वतंत्र प्रक्रिया है जो पूर्ण सुधार के लिए कार्य करती है।

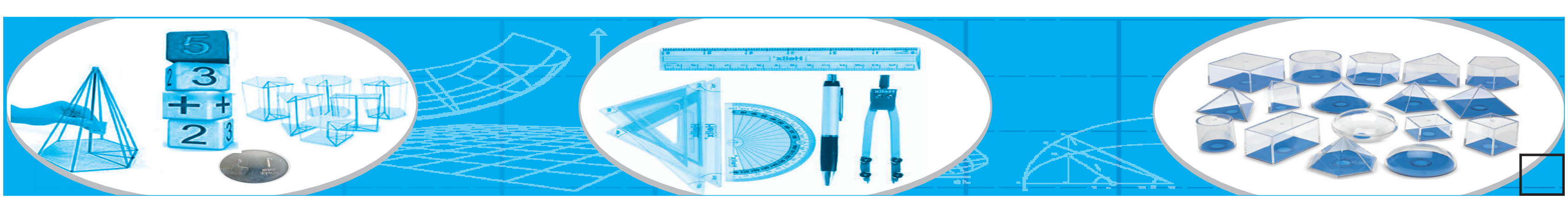
अवधारणा की व्यापकता और संवर्धित विस्तार क्षेत्र को दृष्टिगत रखते हुए , मूल्यांकन को विभिन्न श्रेणियों में अनेक विधियों से वर्गीकृत किया जा सकता है। प्रत्येक वर्गीकरण पद्धति के लिए, वर्गीकरण की कसौटियाँ रीड़ की हड्डी के समान होती हैं तथा इसीलिए मूल्यांकन को भी वर्गीकरण के लिए, कुछ आधारों का अनुसरण करना चाहिए। मूल्यांकन के प्रकार निम्न रूप में हो सकते हैं:

(a) उद्देश्य के आधार पर

(i) निदानात्मक मूल्यांकन

(ii) पूर्वसूचक

(iii) भविष्य सूचक



(b) सातत्यं के आधार पर

(i) रचनात्मक मूल्यांकन

(ii) संकलनात्मक मूल्यांकन

(iii) व्यापक और सतत मूल्यांकन

(c) संदर्भ बिन्दु के आधार पर

(i) कसौटी–संदर्भ - मूल्यांकन

(ii) नियम – संदर्भ मूल्यांकन

इनमें से कुछ श्रेणियों को नीचे स्पष्ट किया जा रहा है:

7.4.1 स्थिति निर्धारक मूल्यांकन/ प्रवेश व्यवहार

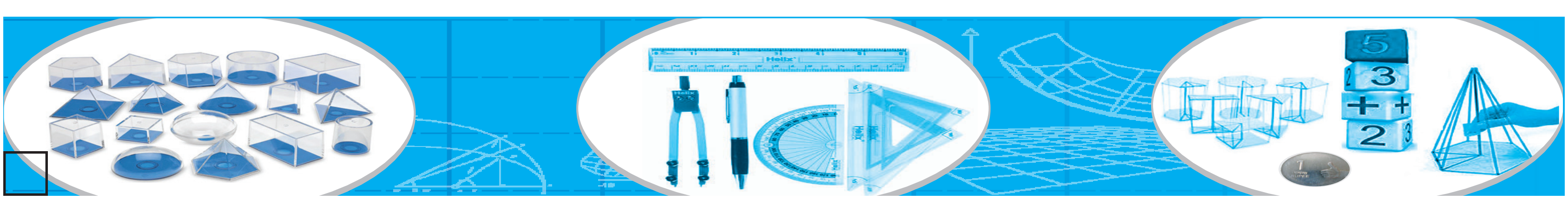
स्थिति निर्धारक मूल्यांकन अधिगम के प्रारंभिक स्तर पर बच्चे की स्थिति ज्ञात करने के लिए होता है। जब कोई शिक्षक बच्चों को कुछ अधिगम अनुभवों से परिचित कराने का प्रयास करता है, तब यह आवश्यक है कि एक बच्चे को उसके पूर्व ज्ञान के पदों में किस स्थान पर रखा जा सकता है, ताकि उसे आगे आने वाले अधिगम के लिए तैयार रहने में समर्थ बनाया जा सके। यह स्थिति निर्धारण मूल्यांकन का एक महत्वपूर्ण स्तर है, क्योंकि यह शिक्षक को बच्चे के अधिगम की कमज़ोरी और शक्ति का आभास कराता है। यदि यह नहीं किया जाए तथा अधिगम अनुभव प्रदान कर दिए जाएँ, तो संभवत: बच्चा नई अवधारणाओं को विकसित करने में समर्थ नहीं हो पाएगा, क्योंकि उसे पूर्व–अपेक्षित अधिगम की ठोस पृष्ठभूमि प्राप्त नहीं है। नई अनुदेशात्मक प्रक्रिया के माध्यम से बच्चा वाँछित योग्यताएँ और सक्षमता केवल तभी प्राप्त कर पाएगा, जबकि उसके पास पूर्व अपेक्षित ज्ञान की ठोस पृष्ठभूमि हो, अन्यथा उसकी कमज़ोरी जारी रहेगी तथा इसका उसकी उपलब्धि पर बुरा प्रभाव पड़ेगा। इसी कारण, इस स्थिति से बचने के लिए तथा बच्चे को अवधारणा और सक्षमता की ठोस उपलब्धि हेतु समर्थ बनाने के लिए, स्थिति निर्धारक मूल्यांकन अति आवश्यक है।

7.4.2 रचनात्मक मूल्यांकन

रचनात्मक मूल्यांकन शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया में ही अंतर्निहित होता है। यह जानना वाँछनीय है कि एक विद्यार्थी ने उद्देश्यों में लिखी गई कोई विशेष योग्यता विकसित कर ली है या नहीं तथा साथ ही शिक्षण और अधिगम की अवधि में उसकी प्रगति के बारें में जानना भी आवश्यक है। यदि उसके अधिगम में कोई कमी रह जाती है, तो उसे शिक्षण की वैकल्पिक युक्तियों से दूर किया जा सकता है। इस प्रकार के मूल्यांकन को 'रचनात्मक मूल्यांकन' कहा जाता है। इस मूल्यांकन का प्रमुख उद्देश्य यह ज्ञात करना है कि बच्चा अनुदेशात्मक प्रक्रिया को किस स्तर तक समझ पा रहा है। यह शिक्षक और विद्यार्थी दोनों को विद्यार्थी की प्रगति तथा शिक्षण विधियों की प्रभाविता के संबंध में पुनर्निवेशन प्रदान करता है, ताकि शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया में सुधार किया जा सके। इस प्रकार के मूल्यांकन को मौखिक टेस्टों, प्रेक्षणों इकाई टेस्टों, अनौपचारिक कक्षा टेस्टों, कुछ कार्यों को देकर (जैसे गृह कार्य) तथा अन्य कक्षा के क्रियाकलाप द्वारा किया जा सकता है। यह मूल्यांकन स्वभाविक रूप में **सतत्** होता है।

7.4.3 निदानात्मक मूल्यांकन

निदानात्मक मूल्यांकन, जैसा कि इसके नाम से ही ज्ञात होता है, कि यह मूल्यांकन निदान प्रदान करने के लिए होता है। इससे एक विशिष्ट विषय में, अवधारणात्मक समझ, अधिगम की प्रक्रिया, भाषा की कमी, इत्यादि के संदर्भ में, बच्चे की अधिगम कठिनाइयों का पता चल जाता है। कभी – कभी औपचारिक टेस्टों से हमें अधिगम के कठिन बिन्दुओं के लक्षणों का ज्ञान



होने में सहायता प्राप्त होती है, परंतु कभी–कभी अधिगम समस्याओं के लक्षणों (कारणों) को ज्ञात करने के एक निश्चित उद्देश्य से विशिष्ट टेस्ट तैयार किए जाते हैं। गणित में, अधिगम में समस्या (कठिनाई) गणितीय अवधारणाओं की समझ की कमी, व्यापकीकरण, प्रक्रियाओं तथा संकेतों की पहचान करने के कारण होती है, जहाँ बच्चें सामान्यत: गलतियाँ करते हैं। इन टेस्टों के माध्यम से, शिक्षक को इस समस्या के बारे में गहराई से ध्यान देना चाहिए तथा किसी अवधारणा अथवा किसी समस्या को हल करने में एक विशिष्ट चरण के अधिगम में बच्चे की विशिष्ट कठिनाई को ज्ञात करना चाहिए। रचनात्मक मूल्यांकन करते समय निदानात्मकक टेस्ट मूल्यांकन प्रक्रिया के संपूरक बन जाते हैं। यदि अधिगम के कठिन बिन्दुओं के लक्षण उचित रूप से प्राप्त कर लिए जाएँ तथा उपयुक्त उपचारात्मक कदम उठा लिए जाएँ, तो कम उपलब्धियों वाले विद्यार्थियों की अधिगम उपलब्धियों तथा साथ ही अधिगम दर में निश्चित रूप से सुधार आएगा।

7.4.4 संकलानात्मक मूल्यांकन

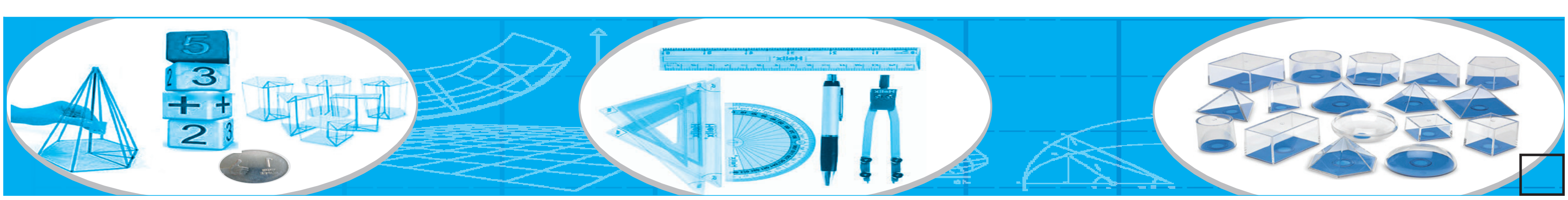
मूल्यांकन का एक अन्य प्रकार है संकलनात्मक (या सारांशात्मक) मूल्यांकन। यह एक कोर्स या एक सत्र के अंत में किया जाता है। इसमें विद्यार्थी की उपलब्धियों की एक औपचारिक जाँच सम्मिलित होती है तथा इसका उपयोग विद्यार्थियों की उपलब्धियों को ग्रेड देने, रैंक (क्रम) प्रदान करने, अगली कक्षा में पहुँचाने (उन्नति देने) तथा उन्हें प्रमाणित करने में किया जाता है। इसमें निदान और उनके उपायों के लिए कोई स्थान नहीं होता है।

7.5 मूल्यांकन के उद्देश्य

- शिक्षा के क्षेत्र में मूल्यांकन के अनेक उद्देश्य हैं। यद्यपि, परंपरागत रूप से, मूल्यांकन मुख्यत: एक निश्चित समयावधि के दौरान शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया पूर्ण होने के बाद, विद्यार्थियों की उपलब्धियों को निर्धारित करने के लिए किया जाता था ताकि उनकी उच्चतर कक्षाओं में उन्नति कर दी जाए और उन्हें प्रमाण पत्र दे दिए जाएँ। मूल्यांकन के कुछ उद्देश्यों को निम्न में लिखा जा सकता है:
- बेहतर अधिगम के लिए विद्यार्थियों को प्रेरित करना।
- विद्यार्थियों की सामर्थ्य और कमियों के बारे में जानना।
- अनुदेशों की प्रभावशीलता की जाँच करना।
- अधिगम में सुधार हेतु वैकल्पिक विधियों को अपनाना।
- यहि निर्धारित करने में सहायता करना कि अधिगम उद्देश्य किस स्तर तक प्राप्त हो पाए हैं।
- विद्यार्थियों की प्रगति की दर को निर्धारित करना।
- विद्यार्थियों की प्रमाणीकरण का आधार प्रदान करना।
- विद्यार्थियों के वर्गीकरण में सहायता करना।
- भविष्य में विद्यार्थियों की सफलता की प्रागुक्ति (भविष्य वाणी) करना।
- विभिन्न विषयों, विभिन्न स्तरों, शिक्षावृत्ति, नौकरी, इत्यादि में प्रवेश के लिए विद्यार्थियों के चुनने में सहायता करना।

7.6 मूल्यांकन के सिद्धांत

जैसे कि बृहत रूप से स्वीकार किया जा सकता है, शिक्षा एक सामाजिक और मनोवैज्ञानिक प्रक्रिया है, जो दिन प्रतिदिन, जीवन के प्रत्येक क्षेत्र में उपयोग की जाती है। एक व्यक्ति अन्य व्यक्तियों के व्यवहार या सक्षमता या निपुणता का मूल्यांकन करते समय नियमित अंतरालों पर स्वंय अपनी क्रियाओं का भी मूल्यांकन कर रहा होता है। शैक्षिक मूल्यांकन को शिक्षार्थी के सम्पूर्ण स्वस्थ विकास के मापन या आकलन या दोनों के रूप में समझा जा सकता है, जिसमें उसका शारीरिक, सामाजिक, नैतिक और बौद्धिक विकास भी सम्मिलित है। एक निदेशात्मदक अवधारणा होने के कारण, शैक्षिक मूल्यांकन को कुछ विशिष्टक सिद्धांतों का अनुसरण करना होता है।



Unit-VII.indd 143 3/29/2017 4:03:09 PM

कुछ महत्वपूर्ण (प्रमुख) सिद्धांत जिनका शैक्षिक मूल्यांकन में अनुसरण करना चाहिए निम्न हो सकते हैं:

(1) सततता

मूल्यांकन की प्रक्रिया सतत् होनी चाहिए, अर्थात् इसे 24x7 प्रक्रिया होनी चाहिए। साथ ही, एक बेहतर मूल्यांकन की प्राप्ति के लिए, सभी क्रियाकलापों को एक सतत् अभिगम के रूप में देखना चाहिए।

(2) व्यापकता

किसी व्यक्ति समूह का मूल्यांकन एक व्यापक (या विस्तृत) रूप में करना चाहिए। साधारण शब्दों में, इसे शारीरिक, बौद्धिक भावनात्मक, सामाजिक, नैतिक, सौन्दर्य संबंधी तथा शैक्षिक पहलुओं के मूल्यांकन पर विचार करना चाहिए।

(3) संपूर्णता

मूल्यांकन प्रक्रिया द्वारा शिक्षार्थी का पूर्ण व्य वहार, केवल भागों में नहीं, अपितु संपूर्णता में भी मूल्यांकित किया जाना चाहिए। व्यक्ति को न केवल उसकी वर्तमान स्थिति के अनुसार देखना चाहिए, अपितु भविष्य में कार्य निष्पादनों के लिए उसके अंदर की छिपी हुई क्षमता को भी देखना चाहिए।

(4) स्थानिक असीमितता

जहाँ तक शैक्षिक मूल्यांकन का संबंध है, इसे स्थानिक परिसीमाओं से स्वतंत्र होना चाहिए। इसमें कक्षा के क्रियाकलाप तथा साथ ही उसके बाहर के क्रियाकलाप निहित होने चाहिए। मूल्यांकन केवल कक्षा में किए गए क्रियाकलापों तक ही सीमित नहीं रहना चाहिए, अपितु इसमें कक्षा के बाहर किए गए क्रियाकलापों पर भी मूल्यांकन की दृष्टि होनी चाहिए। इससे भी अधिक रूप में, मूल्योंकन कहीं भी हो सकता है, चाहे अनुदेशों (शिक्षण) का स्थान कहीं भी हो।

(5) अधिगम अनुभव

मूल्यांकन शिक्षार्थी के विशिष्ट अधिगम अनुभवों पर आधारित होना चाहिए। इसे शिक्षार्थी के संदर्भ में अनुभवों पर ध्यान देना चाहिए। शिक्षण और अधिगम में, संदर्भ एक महत्वपूर्ण भूमिका अदा करता है। साथ ही, क्योंकि इस प्रक्रिया में मूल्यांकन अंत-र्निहित होता है, इसलिए शिक्षार्थी के पिछले और वर्तमान अनुभवों की बात करते समय संदर्भ का अवश्य ध्यान रखना चाहिए।

(6) शिक्षार्थी केन्द्रिता

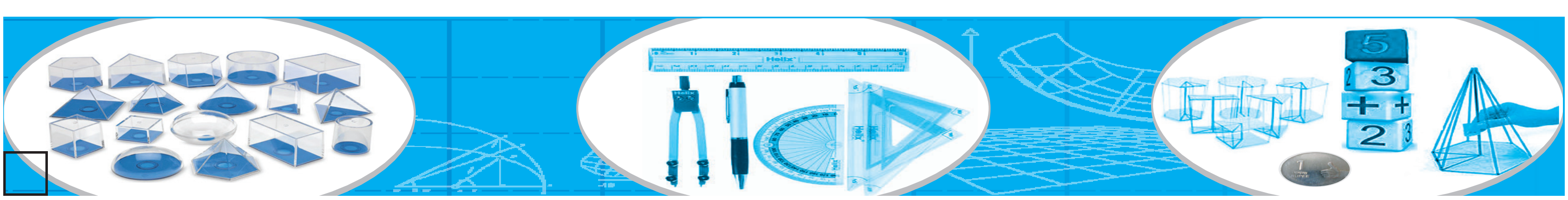
मूल्यांकन की प्रक्रिया को शिक्षार्थी तथा उसके व्यवहार और संज्ञान पर केन्द्रित होना चाहिए, न कि मूल्यांकन करने वाले पर, हम अभी तक उस मूल्यांकन पद्धति से संघर्ष कर रहे हैं, जो प्रशासन तथा पूर्वधारणा और पूर्वनिर्णय से परिभाषित शैक्षिक पद्धति की ओर केन्द्रित है। संपूर्ण शैक्षिक मूल्यांकन प्रक्रिया के केन्द्र पर शिक्षार्थी अभी भी नहीं है। यह एक आदर्श स्थिति होगी, यदि मूल्यांकन शिक्षार्थी द्वारा, शिक्षार्थी के लिए तथा शिक्षार्थी से होगा।

(7) साधनों का चुनाव

साधनों का चुनाव इस प्रकार किया जाना चाहिए कि वे आकलन का, और बाद में मूल्यांकित की जाने वाली कसौटियों के लिए उचित हों। सभी स्तिरों, सभी स्थितियों तथा सभी पद्धतियों के लिए कोई सर्वव्यापी साधन या रामबाण औषधि नहीं है। मूल्यांकन का साधन मूल्यांकन की सभी कसौटियों पर कार्य नहीं कर सकता है तथा इसीलिए साधनों का चुनाव मूल्यांकन के उद्देश्यों, उसकी प्रक्रिया तथा उसके निर्गम को दृष्टिगत रखते हुए किया जाना चाहिए।

8. वस्तुनिष्ठता

मूल्यांकन प्रक्रिया वस्तुनिष्ठ होनी चाहिए। इसे पक्षपातों से स्वतंत्र होना चाहिए। वस्तुनिष्ठता उस समय अधिक चुनौतीपूर्ण हो



जाती है, जब मूल्यांकन सतत् और एक-से-एक होता है। साथ ही, गुणवत्ता से संबधित मूल्यांकन में उच्च स्तर के ध्यान की आवश्यकता होती है जबकि मूल्यांकन की प्रक्रिया और उसके उत्पाद में वस्तुनिष्ठता रखी जानी होती है।

(9) एक अच्छे मूल्यांकन कार्यक्रम की विशेषताएँ

मूल्यांकन के उपुर्यक्त वर्णित सिद्धांतों से, अच्छे मूल्यांकन की निम्नलिखित विशेषताओं की व्युत्पति की जा सकती है:

(1) मूल्यांकन एक उद्देश्य आधारित प्रक्रिया होनी चाहिए

मूल्यांकन का उद्देश्य शैक्षिक उपलब्धियों का मापन करना है, जो अभिप्रायित अधिगम परिणामों अथवा अनुदेशात्मक उद्देश्यों के पदों में परिवर्तित होते हैं। इस रूप में, सभी मूल्यांकन अनुदेशात्मक उद्देश्यों की ओर अग्रसर होने चाहिए, क्योंकि ये उद्देश्य, अधिगम के परिणाम को निरूपित करते हैं। मान्य मूल्यांकन के लिए, मूल्यांकन के सभी साधन अनुदेशात्म उद्देश्यों पर आधारित होने चाहिए।

(2) मूल्यांकन एक सतत् प्रक्रिया होनी चाहिए

क्योंकि वृद्धि एक सतत् प्रक्रिया है, इसलिए शिक्षक/ मूल्यांकनकर्ता को उन परिवर्तनों का संज्ञान होते रहना चाहिए जो समय–समय पर बच्चे के अधिगम में होते जा रहे हैं। इसी कारण, बार–बार या सतत् मूल्यांकन, शिक्षार्थी की वृद्धि और विकास के बारे में विश्वसनीय प्रमाण प्राप्त करने के लिए, आवश्यक है। जब तक मूल्यांकन को शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया का एक अभिन्न अंग नहीं बनाया जाएगा, यह शिक्षार्थियों की कठिनाइयों के निदान में सहायता नहीं कर सकता तथा यह उपचारात्मक शिक्षण के अवसरों का प्रदान करने और शिक्षण-अधिगम के लिए वैकल्पिक युक्तियों को अपनाने में भी सहायता नहीं कर सकता। सतत् मूल्यांकन अधिगम में सुधार को बढ़ाता करता है। इसलिए इसे केवल कोर्स क्रियाकलाप के अंत में ही नहीं किया जाना चाहिए।

3. मूल्यांकन व्यापक होना चाहिए

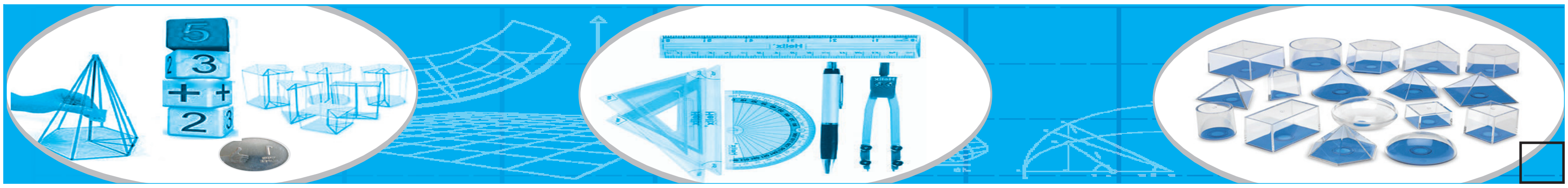
शिक्षार्थियों में वृद्धि की विभिन्न विमाएँ–बौद्धिक, भावनात्मक और शारीरिक, होती है जो विभिन्न उद्देश्यों के पदों में निरूपित होती है। इसीलिए, जब तक मूल्यांकन सभी पहलुओं पर प्रमाण प्रदान नहीं करता, इसे निर्णय लेने के लिए पर्याप्त रूप से व्यापक नहीं समझा जा सकता है। सभी संभव उद्देश्यों की जाँच करने के अतिरिक्त, व्यापक मूल्यांकन में विभिन्न प्रकार के प्रमाणों को प्राप्त करने के लिए, विभिन्न साधन और तकनीक संबद्ध होते हैं। अत: सफलतापूर्ण मूल्यांकन की एक व्यापक प्रक्रिया होनी चाहिए।

4. मूल्यांकन को अनुदेशों का एक अभिन्न अंग होना चाहिए

यह स्पष्ट है कि मूल्यांकन अनुदेशात्मक प्रक्रिया का एक अभिन्न भाग है। इसे कोर्स क्रियाकलाप के अंत में नहीं होना चाहिए, अपितु इसे संपूर्ण प्रक्रिया का एक अंतर्निहित घटक होना चाहिए, क्योंकि ये स्वाभाविक रूप में अभिन्न हैं। अत: अनुदेश (शिक्षण) और मूल्यांकन परस्पकर साथ–साथ चलते रहने चाहिए।

5. मूल्यांकन सहयोगात्मक होनी चाहिए

क्योंकि व्यापक मूल्यांकन शिक्षार्थी के विकास के सभी पहलुओं के प्रमाणों पर आधारित है, इसलिए अकेले शिक्षक को उसके विकास (उन्नति) के बारे में पूरे प्रमाण प्राप्त नहीं हो सकते हैं। उसके सामाजिक संबंधों, भावनात्मक व्यवहारों, संस्कारों, वैज्ञानिक अभिरूचियों, सामाजिक आय रुचियों, पसंद और नापसंद, इत्यादि के संदर्भ में प्रमाण एकत्रित करने के लिए, अन्य शिक्षार्थियों और उसके साथियों, माता–पिता तथा उन सभी व्यक्तियों, जो उसकी उन्नति और विकास को देखते रहे हैं, के सहयोग की आवश्यकता है। अत: एक अच्छे मूल्यांकन के लिए, विभिन्न व्यक्तियों और संस्थाओं का सहयोग आवश्यक है।



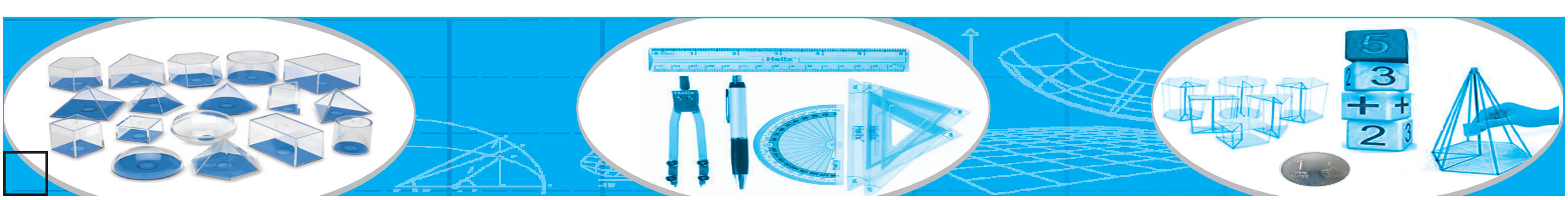
6. मूल्यांकन एक गतिशील प्रक्रिया होना चाहिए

मूल्यांकन की गतिशील प्रक्रिया उद्देश्यों, अनुदेशों और मूल्यांकन प्रविधियों के स्तर में परिवर्तनों को सूचित करता है। मूल्यांकन अनुदेशों के उद्देश्यों पर आधारित होता है, परंतु इसके साथ ही यह हमें इसकी जाँच करने में सहायता करता है कि ये उद्देश्य विद्यार्थियों के एक विशेष समूह द्वारा कितने स्तर तक प्राप्त किए जा सकते हैं। एक बार किसी कक्षा के लिए, अनुदेशात्मक समय काल में, विषय निर्दिष्ट विषय–सूची से संबंधित उद्देश्य प्राप्त हो जाते हैं, तब आगे के अनुदेशों के लिए नए उद्देश्य निर्दिष्ट किए जाते हैं। इसके साथ ही, इन नए उद्देश्यों की आवश्यकताओं को पूर्ण करने के लिए नई मूल्यांकन तकनीकों को ड़िज़ाइन करना पड़ता है। इससे मूल्यांकन प्रक्रिया में गतिशीलता सुनिश्चित होती है ।

7. मूल्यांकन एक निर्णय लेने वाली प्रक्रिया होनी चाहिए

शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया के प्रत्येक चरण पर आकलन आवश्यक है। शिक्षण–अधिगम से पहले यह आवश्यक है कि शिक्षण–अधिगम युक्ति अपनाने का निर्णय लेने के लिए, विद्यार्थियों के प्रवेश व्यहवहार को निर्धारित किया जाए। शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया के दौरान, विद्यार्थीयों के अधिगम की प्रक्रिया पर परिणामों के फीडबैक का उपयोग करना आवश्यक है, ताकि अगले (नए) निवेशों की सफलता सुनिश्चित हो पाए। एक इकाई अथवा कोर्स के अंत में, इसलिए यह आवश्यकक है कि विद्यार्थियों के निष्पादनों के आधार पर उनका वर्गीकरण किया जाए, उन्हें ग्रेड दिए जाएँ तथा उन्हें प्रमाण पत्र दिए जाएँ। इस प्रकार, स्थान निर्धारक, रचनात्मक, निदानात्मक और संकलनात्मक मूल्यांकनों को एक साथ मूल्यांकन के उद्देश्य के अनुसार चलना पड़ेगा।

यदि विद्यालय मूल्यांकन के उपर्युक्त पहलुओं को दृष्टिगत रखें, तो इसमें कोई संदेह नहीं है कि हमारे स्कूलों में मूल्यांकन पद्धति में सुधार किया जा सकता है, जिससे बाद में विद्यार्थियों की अधिगम उपलब्धियों के सुधार होने में सहायता मिलेगी। जो इन संशोधित मूल्यांकन अभ्यासों को लागू करेंगे वे वास्तविक रूप से प्रभावी विद्यालय सिद्ध होंगे। शिक्षा की गुणवत्ता में सुधार लाने के लिए, इन प्रभावी स्कूलों को सुदृढ़ किए जाने की आवश्यकता है। यह निश्चित है कि यदि मूल्यांकन को गुणवत्ता सुधारने के लिए एक साधन के रूप में ईमानदारी से उपयोग किया जाएगा, तो नि:संदेह विद्यार्थियों के निष्पादन में श्रेष्ठता (उत्तमता) क्रमबद्ध रूप से प्राप्त हो जाएगी। यदि अधिगम में कोई कमजोरियाँ होंगी, तो अधिगम की कमी को सुधारने के लिए, सही समय पर हस्तक्षेप करके इन्हें समय पर दूर किया जा सकता है। इस प्रकार, मूल्यांकन शैक्षिक पद्धति में एक कसौटी रहेगा।



8

गणित अधिगम का आकलन

8.1 भूमिका

शिक्षा में किए गए सुधार और उसके बाद एन. सी. एफ – 2005 की संस्तुतियों ने, गणित की पाठ्यपुस्तकों, इसके शिक्षण एवं परीक्षा में परिवर्तन के लिए प्रोत्साहित किया है, जबकि पारंपरिक गणित शिक्षा गणितीय तथ्यों को याद करने और विभिन्न प्रक्रियाओं के प्रभावी प्रयोग पर बल देती है। एन. सी. एफ – 2005 में शिक्षार्थियों के अनुभवों का गणितीयकरण करने के लिए उनके अन्त: संसाधनों का जनन करने पर बल दिया गया है। इसकी संस्तुतियों में, स्पष्टत: गणितीय तथ्यों को याद रखने और आवश्यकतानुसार याद करने के स्थान पर गणितीय अवधारणाओं की संरचना और उनके समझने पर बल दिया गया है, जिसमें अमूर्तीकरण, संरचनीकरण एवं व्यापकीकरण के रूप में गणितीय विचारों के गहरे संयोजन की आवश्यकता होती है। समस्या हल करना, गणित शिक्षा के आवश्यक घटक के रूप में गणित के विद्यालयी पाठयक्रम में, विभिन्न स्तरों पर उत्तरोतर बना रहना चाहिए।

गणित शिक्षा में व्यापक परिवर्तन, अधिगम सिद्धान्तों, शिक्षार्थी मनोविज्ञान और हमारी गणित की समझ के विषय में बदलती हुई सोच का परिणाम है। यह स्वीकार किया जा चुका है कि गणित, प्रक्रिया और परिणाम दोनों ही हैं; यह ज्ञान का संगाठित रूप और शिक्षार्थी द्वारा किया गया सृजनात्मक प्रयास, दोनों ही है। उतरोत्तर विकास की श्रंखला में गणित शिक्षक एवं शिक्षाविद, वास्ताविक गणित की प्रकृति के विषय में एक नई सर्वसम्मति पर पहुँचे हैं (एरनेस्ट, 1991) गणित को, ज्ञान के अन्य क्षेत्रों से, अलग करने वाले मुख्य अभिलक्षणों का सारांश निम्न प्रकार है:

"गणित पैटर्नों की भाषा एवं विज्ञान हैं...। जिस प्रकार जीव विज्ञान जीवित प्राणियों का विज्ञान है, और भौतिकी पदार्थ एवं उर्जा का विज्ञान है, उसी तरह गणित पैटर्न का विज्ञान है...। गणित को जानने हेतु, पैटर्नों का अनुसंधान और उनमें परस्पर सम्बंध स्थापित करना, पैटर्नों को जटिल एवं अस्पष्ट सन्दर्भों में वर्णित करना, पैटर्नों को समझना और उनमें संबध स्थापित करना, पैटर्नों का वगीकरण करना, उनका कूट लेखन करना एवं वर्णन करना, विभिन्न व्यावहारिक उद्देश्यों के लिए पैटर्नों की भाषा में लिखना एवं पढ़ना" आदि आवश्यक है (गणितीय विज्ञान शिक्षा बोर्ड, 1990 P.5)।

गणित को मूलभूत अंकगणितीय कौशल के रूप में स्वीकार करके एक व्यापक विचार को जन्म दिया गया है, जो गणित पर एक व्यापक प्रक्रिया अथवा सोचने एवं तर्क करने के तरीके के रूप में बल देता है (एन सी टी एम 2000)।

गणित अधिगम के आधुनिक सिद्धान्त सुझाव देते हैं कि विद्यार्थी ज्ञान के निष्क्रिय प्रापक नहीं हैं, परन्तु सामाजिक एवं सांस्कृतिक परिवेश में क्रियाशील रहकर ज्ञान की संरचना करते (वैन गलासर्सफील्डन, 1991) हैं।

इस बदले हुए दृष्टिकोण ने तार्किक चिंतन, अन्वेषण एवं समस्या समाधान (हल करने) को प्रोत्साहित करने के लिए,

गणित को विषय के रूप में पढ़ाने की विधियों को विस्तृत कर दिया है। गणित अधिगम का विस्तार अवधारणाओं के अधिगम, प्रक्रिया एवं अनुप्रयोग से कहीं आगे है। इसमें एक मानवीय विषय के रूप में गणित के प्रति सही दृष्टिकोण एवं उसकी सराहना करना सम्मिलित है। गणित का अधिगम अर्थपूर्ण अनुभवों की एक रचनात्मक प्रक्रिया है, जिससे गणितीय विचारों का एक नया क्षेत्र उत्पन्न होता है। यह एक संचयी प्रक्रिया भी हैं, जिसमें पहले से अर्जित गणितीय विचारों पर नए गणितीय विचारों का विकास किया जाता है।

8.2 गणित में आकलन एवं मूल्यांकन

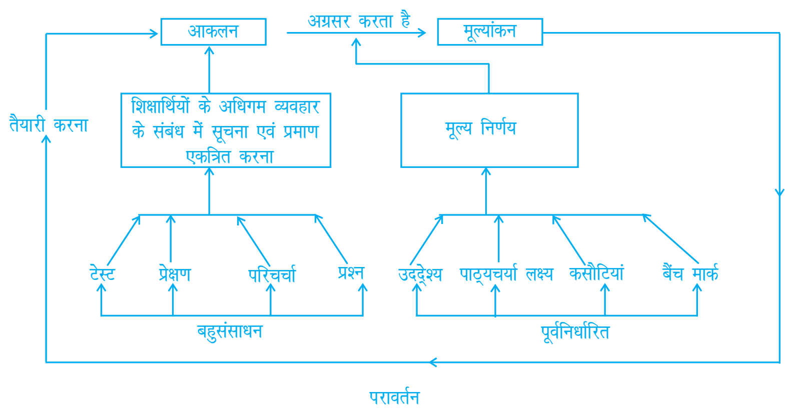
आकलन जटिल, परिवर्तनशील एवं निरन्तर अनुकूल बनने वाली शिक्षा प्रक्रिया का एक विवेचनात्मक घटक है। पिछले कुछ वर्षों में आकलन की अवधारणा पर पुन: विचार हुआ है और आकलन एवं मूल्यांकन की नई विधियाँ सामने आई हैं। कोर्स के अंत में कार्य आदेश पर बल देने के स्थान पर, शिक्षार्थियों के अधिगम के बारे में सूचित निर्णय देने पर ध्यान केन्द्रित किया जाता है। आकलन के अन्तर्गत, शिक्षार्थियों के अधिगम के विषय में निर्णय करने के लिए, अधिगम समस्याओं के उपचार के लिए और अपने स्वयं के शिक्षण के प्रभावशाली होने का आकलन करने के लिए, अध्यापक द्वारा इकट्ठे किए गए बहु प्रकार के प्रमाणों का सुव्यवस्थित विश्लेषण किया जाना आवश्यक है।

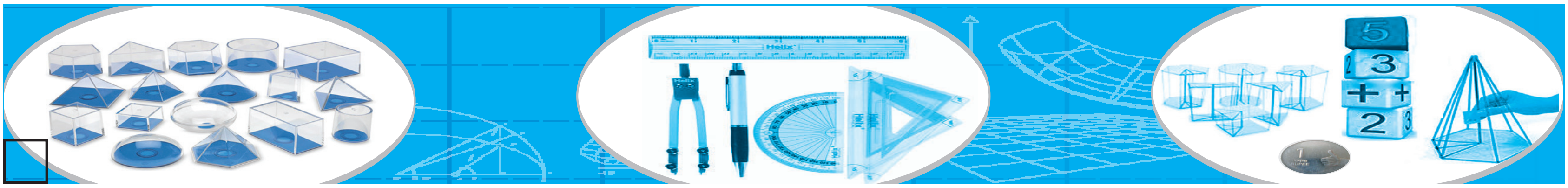
आकलन का बदलता हुआ स्वरूप, गणित शिक्षण और अधिगम के विषय में हमारे बदलते हुए दृष्टिकोण का परिणाम है। अब गणित को पदानुक्रमिक और पृथक विषय के रूप में नहीं देखा जाता है (स्टेफैंस,1992.)।

आकलन, गणित के शिक्षण और अधिगम में एक विवेचनात्मक प्रकरण है, जिसके लिए सावधानीपूर्वक तैयार की गई आकलन गणितीय प्रक्रियाओं में शिक्षार्थी की समझ को दर्शाती हो। इसलिए संकलनात्मक आकलन (जहाँ पर शिक्षार्थी की उपलब्धियों का एक आय के रूप में समग्र आकलन किया जाता है) से अधिक सहयोगी रचनात्मक आकलन (जहाँ कक्षा में विद्यार्थी का अधिगम व्यवहार अर्थपूर्ण तरीके से आगे अधिक सीखने में प्रयोग किया जाता है) की ओर स्थानान्तरित होने की आवश्यकता है।

इससे पहले कि हम आगे बढ़ें और गणित में आकलन की विभिन्न विधियों के विषय में अपनी समझ को गहरा करें, यह आवश्यक है कि 'आकलन' और 'मूल्यांकन' के अन्तर को समझा जाए। ये शब्द प्राय:एक दूसरे के स्थान पर प्रयोग किए जाते हैं, जिससे इनके अर्थ और प्रयोग में भ्रम पैदा होता है।

आकलन, मूल्यांकन प्रक्रिया का प्रारम्भिक चरण है। यह शिक्षार्थी की अधिगम प्रक्रिया के विषय में सघन माध्यमों से अर्थपूर्ण सूचना एवं प्रमाण एकत्रित करने की एक सुव्यवस्थित प्रक्रिया है। इस प्रक्रिया में मूल्यांकन क्रिया चरण है जो कुछ पूर्व निर्धारित अधिगम उद्देश्यों / कसौटियों/ बैंच मार्क / पाठयक्रम उद्देश्यों के अन्तर्गत शिक्षक को आकलन प्रमाणों को मापने की अनुमति प्रदान करता है। मूल्यांकन, निर्णय लेने, पुनर्विचार करने और कर्म करने की ओर अग्रसर करता है। इसलिए, आकलन एवं मूल्यांकन की सम्पूर्ण प्रक्रिया साथ–साथ चलती है। केवल विश्वसनीय आकलन ही विश्वसनीय मूल्यांकन की ओर अग्रसर करता है, जबकि मूल्यांकन के बिना आकलन उद्देश्यहीन है, जैसा कि नीचे दर्शाया गया है:





8.2.1 गणित में आकलन

"आकलन को महत्वपूर्ण गणित के अधिगम में सहयोग करना चाहिए और शिक्षक एवं विद्यार्थी दोनों के लिए उपयोगी सूचना जुटानी चाहिए", (एन सी टी एम 1995)।

जैसा कि हम पूर्व में चर्चा कर चुके हैं कि गणित का अधिगम एक संचयी प्रक्रिया है जो कि गणितीय ज्ञान की समझ को प्रोत्साहित करती है। अर्थपूर्ण गणित अधिगम विद्यार्थी की निम्नलिखित योग्यताओं को प्रतिबिम्बित करता है:

- विचारों को संचारित करने के लिए गणित अधिगम का प्रयोग करना
- गणितीय ज्ञान के विभिन्न पहलुओं को समाकलित करना।
- अवधारणाओं और प्रक्रियाओं को जोड़ना
- उनके अनुभवों का गणितीयकरण करना
- अमूर्तीकरण, व्यापकीकरण, तार्कीकरण और विश्लेषण
- गणित की मानवीय विषय के रूप में सराहना करना।

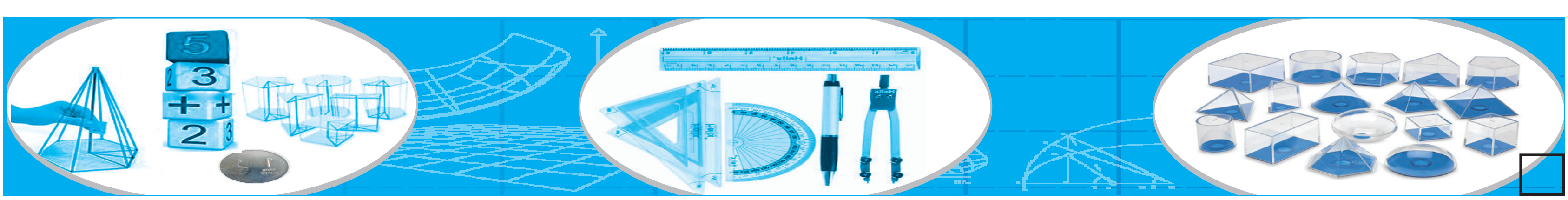
सीमित अंतरालों पर दिए गए संख्यात्मक अंक अथवा ग्रेड विद्यार्थी के ज्ञान की केवल एक झलक देते हैं। यदि आकलन का लक्ष्य विद्यार्थी की समझ और उपलब्ध के बारे में वैध एवं विश्वसनीय रूप रेखा प्रस्तुत करना है, तो प्रमाण अनेक स्रोतों से और लगातार अंतरालों पर इकट्ठे किए जाने चाहिए।

आकलन के अंतर्गत् विद्यार्थियों को अवसर प्रदान करना चाहिए कि उन्होंने जो कुछ गणित में सीखा है उसे वास्तविक जीवन के ऐसे संदर्भों में प्रयोग कर सकें जो नियमित पाठ्यपुस्तकों से बाहर जो हैं। विद्यार्थियों को गणित को एक मानवीय रचना समझना चाहिए जो उनके स्वयं के जीवन एवं समाज में फैली हुई है। यह आकलन के ऐसे क्रियाकलापों की आवश्यकता का बोध कराता है जिनका उद्देश्य विद्यार्थियों को अपने आस – पास गणितीय संसार की सराहना करने के लिए प्रोत्साहित करना है।

विद्यार्थियों की प्रगति का आकलन करने के लिए जिन विधियों एवं कौशलों का प्रयोग किया जाता है, उनके बारे में पुनर्विचार करने के लिए मूल्यवान शैक्षिक सुधारों में महत्वाकांक्षी लक्ष्य निर्धारित किए गए हैं। गणित शिक्षा का उच्च उद्देश्य, जो शिक्षार्थी के अन्त: संसाधनों को विकसित कर विषय की गहरी समझ की आशा करता है; मूल्यांकन पद्धति में परिवर्तन चाहता हैं, जो शिक्षार्थी के सामर्थ्य एवं अवसर को प्रतिबिम्बित करे।

उपरोक्त चर्चा के संदर्भ में, गणित के मूल्यांकन में मुख्य परिवर्तन करने की आवश्यकता है, जैसा कि निम्नलिखित तालिका में दर्शाया गया है:

से	को
परीक्षा (छटनी करने के लिए / वर्गीकरण करने के लिए)	सूचित निर्णय के लिए आकलन
कुछ असंतत	अनुदेशात्मक कार्यो एवं आकलन का सीवनहीन समाकलन
व्यवहार संबंधी उद्देश्यों का आकलन	रचनात्मक उद्देश्य
एक संख्यात्मक प्राप्तांक	बहु आयामी रूप रेखा
सही उत्तर अभिगम	कारण सहित उत्तर अभिगम
ग्रेड और रिपोर्ट कार्ड देना	संचयी अधिगम प्रगति आलेख



आकलन, अधिगम के समाज रचना सिद्धांत का समग्र भाग होना चाहिए, जिसे पूरे विश्व की गणित शिक्षा अनुसंधान और विभिन्न सुधार दस्तावेजों का समर्थन प्राप्त हो।

हमें ऐसे आकलन कार्यों की आवश्यकता है, जो विद्यार्थियों की ज्ञान निर्माण में सहायता करें और विद्यार्थियों की विविधता का सम्मान करें। आकलन के उद्देश्य दिनचर्या के गणितीय तथ्यों और कौशलों से हटकर, अवधारणाओं की समझ, प्रक्रिया का ज्ञान, सराहना और प्रयोग, व्यक्तिगत विश्वास और गणित की ओर दृष्टिकोण, पर स्थानान्तरित होना चाहिए। कक्षा में आने वाले प्रत्येक विद्यार्थी के पास अनेक सांस्कृतिक अनुभव होते हैं। "इस प्रकार की विविधता की पहचान ने मूल्यांकन की दूरदर्शिता में एक ऐसे तंत्र की ओर स्थानान्तरण की आवश्यकता पर बल दिया है जो वाह्य प्रमाणों की बजाय अनेक स्रोतों से प्राप्त प्रमाणों पर आधारित हो" (एन सी टी एम – 1995)।

8.3 सतत् एवं व्यापक आकलन (सी सी ए)

सी सी ए का अर्थ है सतत् एवं व्यापक आकलन योजना, जिसमें शिक्षार्थी के अधिगम विकास के विविध गुण सम्मिलित होते हैं। सतत् से तात्पर्य है, एक निरन्तर चलने वाली प्रक्रिया जिसके अन्तर्गत शिक्षार्थी के प्रदर्शन का निरंतर आकलन किया जाता है।

व्यापक (समग्र) से तात्पर्य है, अधिगम के सभी पहलुओं को सम्मिलित करते हुए शिक्षार्थी की विविध रुचियों एवं योग्यताओं का मूल्यांकन करने के लिए आकलन अवसरों की एक विस्तृत श्रृंखला। आकलन, शिक्षण की एक अंतर्ग्रथित प्रक्रिया के रूप में, शिक्षक को शिक्षार्थी के वर्तमान अधिगम और भविष्य के संभावित अधिगम का अर्थपूर्ण मूल्यांकन करने की अनुमति प्रदान करता है। मूल्यांकन को अधिक क्रियाशील एवं प्रगतिशील बनाने के लिए वर्तमान शिक्षा सुधार सतत् एवं व्यापक आकलन पद्धति का समर्थन करते हैं।

सी.सी.ए. के घटक

A. रचनात्मक आकलन

मूल्य निर्णय

B. संकलनात्मक आकलन

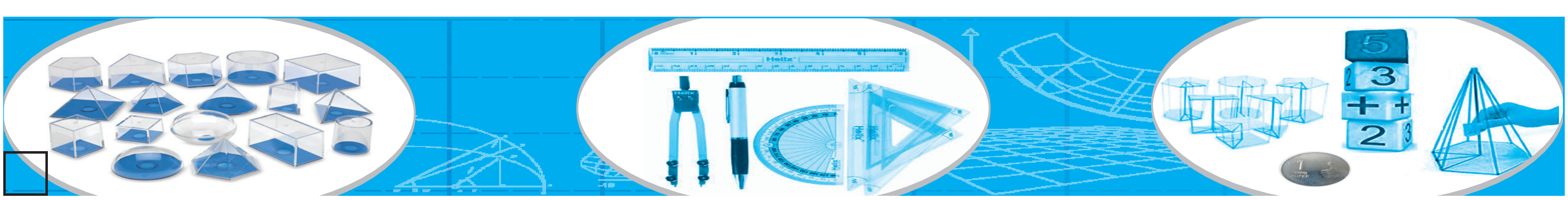
8.3.1 रचनात्मक आकलन

रचनात्मक आकलन, कक्षा के अन्दर निरन्तर चलने वाली ऐसी प्रक्रिया है जो अधिगम उद्देश्यों की प्राप्ति की दिशा में शिक्षार्थी की प्रगति के विषय में शिक्षक एवं शिक्षार्थी दोनों को सूचित करती है। रचनात्मक आकलन, शिक्षक द्वारा कक्षा में शिक्षण के दौरान निम्नलिखित के लिए प्रतिदिन काम में लाए जाने वाले सुअवसर हैं:

- वर्तमान में विद्यार्थियों की गणितीय समझ की पूरी जानकारी प्राप्त करना।
- विद्यार्थियों की वर्तमान समझ के स्तर और निर्धारित लक्ष्यों में अन्तर को पहचानना।
- विद्यार्थियों की अधिगम आवश्यकताओं के अनुसार अन्तर को पूरा करने के लिए प्रयोग की जा रही शिक्षण योजना को संशोधित करना।

ये आकलन रचनात्मक कहलाते हैं, क्योंकि ये अधिगम की संरचना का ऐसा प्रदर्शन करते हैं जो दैनिक शिक्षण क्रिया-कलापों से निकलती है।

ब्लैक और विलियम (वर्ष ?) द्वारा किए गए अनुसंधान संश्लेषण के अनुसार, "जब विद्यार्थियों की सोच के बारे में विशिष्ट जानकारी देता है जिससे भविष्य के अधिगम अनुभवों की सूचना मिलती हो, तो आकलन रचनात्मक होता है।"



रचनात्मक आकलन का मुख्य उद्देश्य, विद्यार्थियों की सोच के बारे में जानकारी देना, कक्षा शिक्षण के दौरान शिक्षक को विद्यार्थियों की सोच एवं तर्कशक्ति पर निगरानी करने के योग्य बनाना, है। यह शिक्षकों को मूल्यवान सूचना देता है, जिससे शिक्षण में आवश्यकतानुसार संशोधन किया जा सकता है। प्रभावशाली रचनात्मक आकलन अनेक प्रकार से विद्यार्थियों के अधिगम को बढ़ाता है। यह विद्यार्थियों को अर्थपूर्ण एवं मूल्यवान गणितीय ज्ञान का सम्मान करने योग्य बनाता है।

जब शिक्षक प्रेक्षणों, साक्षात्कार और विचार – विमर्श जैसी आकलन की विभिन्न विधियों का प्रयोग करते हैं, तो विद्यार्थी मूल्यांकन प्रक्रिया के क्रियाशील प्रतिभागी बन जाते हैं, जिससे वे अधिगम की अपनी जिम्मेदारी समझते हैं और अधिक आत्मविश्वासी एवं स्वतंत्र शिक्षार्थी बन जाते हैं। जब शिक्षक विद्यार्थियों के अधिगम के विषय में आवश्यक सूचना इकट्ठा करते हैं और विचार करते हैं, तो वे सार्थक गाणितीय लक्ष्यों को प्राप्त करने के लिए अपने शिक्षण में परिवर्तन ला सकते हैं। रचनात्मक आकलन शिक्षक के लिए एक सम्पत्ति की तरह है, क्योंकि यह शिक्षक को महत्वपूर्ण निर्णय, जैसे किसी कठिन अवधारणा को दुबारा कब पढ़ाना है, जो विद्यार्थी अधिगम के लिए संघर्ष कर रहें हैं उनके लिए शिक्षण को कब परिवर्तित करना है अथवा जिनको संवर्धन की आवश्यकता है उनके अधिगम के लिए क्या परिवर्तन करने हैं, लेने की शक्ति प्रदान करता है। रचनात्मक आकलन साक्ष्यों का प्राथमिक एवं अनिश्चित स्रोत है जो शिक्षक का निष्कर्ष निकालने एवं निर्णय लेने में मार्गदर्शन करता है। रचनात्मक आकलन के दौरान एकत्रित सूचना को अधिक मूल्यवान बनाने के लिए, शिक्षक को विद्यार्थियों की प्रतिक्रियाओं का सही अथवा गलत के रूप में संकीर्ण विश्लेषण करने के स्थान पर विद्यार्थियों की अन्तदृष्टि को पहचानने के लिए अधिक ध्यान देकर विवरणात्मक विश्लेषण करना चाहिए। विद्यार्थियों की समझ के प्रामाणिक मूल्यांकन के लिए, प्रतिदिन कक्षा में प्रयोग की गई विधियाँ एवं निरन्तर प्रयोग न होने वाली विधियों, दोनों की आवश्यकता होती है। आकलन की विभिन्नि विधियों का चरणबद्ध तरीके से प्रयोग करना विद्यार्थियों की ज्ञानात्मक एवं सांस्कृतिक विविधता को संभालने के लिए हमारी संवेदनशीलता को प्रदर्शित करता है।

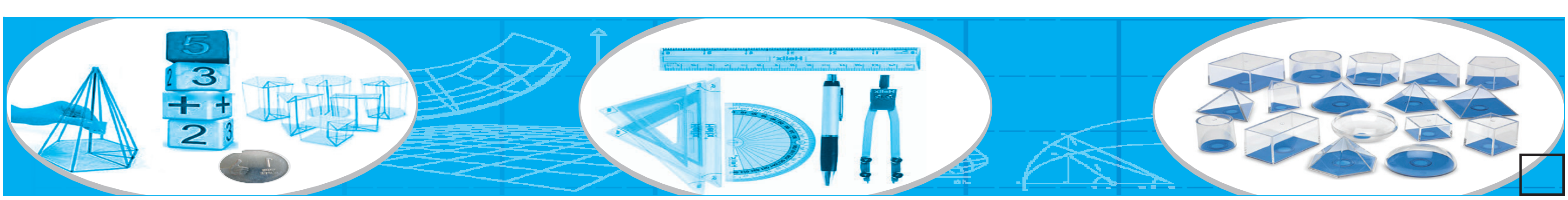
सुपरिभाषित अधिगम लक्ष्य और मापन योग्य शिक्षण उद्देश्य प्रभावशाली रचनात्मक मूल्यांकन के आधार हैं। रचनात्मक मूल्यांकन के दौरान एकत्रित अनके साक्ष्य विवरणात्मक होते हैं जिनको शिक्षण लक्ष्यों के साथ सुमेलित किया जा सकता है।

रचनात्मक आकलन की विधियाँ

जैसा कि हम पूर्व में चर्चा कर चुके हैं, रचनात्मक आकलन में शिक्षक न केवल शिक्षण प्रक्रिया के दौरान विद्यार्थियों के साथ सीधा विचार – विमर्श करता हैं, अपितु कक्षा के बाहर भी विचार –विमर्श करता है। इस प्रक्रिया में प्रेक्षण, विद्यार्थियों की प्रतिक्रियाओं को सुनना, सहपाठी परिचर्चा एवं प्रभावशाली निर्णय लेना सम्मिलित है। इसमें विद्यार्थियों के प्रदर्शन का आकलन करने के लिए पारंपरिक लिखित परीक्षा, चेक लिस्ट एवं रूब्रिक का प्रयोग भी किया जा सकता है। गणितीय अधिगम को समझने के लिए अनेक आकलन अवसर होते हैं, जिनका प्रयोग शिक्षक द्वारा अवश्य किया जाना चाहिए। कक्षा शिक्षण के दौरान आकलन अवसरों में निम्नलिखित सम्मिलित हैं:

- जब एक विद्यार्थी किसी दूसरे विद्यार्थी के साथ चर्चा करता है।
- जब विद्यार्थी कक्षा में पढ़ाई जा रही विषय वस्तु से संबंधित प्रश्न पूछते हैं:
- जब विद्यार्थीगण शिक्षक द्वारा पूछे गए प्रश्नों के उत्तर देते हैं।
- जब विद्यार्थीगण अधिगम का विभिन्न स्थितियों में प्रयोग करते हैं।
- जब विद्यार्थी कक्षा शिक्षण के दौरान स्वयं अपने तर्क देते हैं।
- जब विद्यार्थी अधिगम के प्रति उत्तेजित दिखाई देते हैं और कक्षा का आन्नद लेते हैं।

अधिगम प्रगति की निगरानी करने के लिए और आवश्यकतानुसार शिक्षण विधियों में परिवर्तन करने के लिए, उपरोक्त परिस्थितियाँ रचनात्मक आकलन की विधियों के उदाहरण हैं। आइए, अब इनमें से कुछ विधियों की चर्चा करते हैं:



(A) विद्यार्थियों का अवलोकन (प्रेक्षण) करना

कक्षा शिक्षण के दौरान विद्यार्थी का अशाब्दिक व्यवहार (भौंहें चढ़ाना, परेशान दिखना, सिर हिलाना, चमकती आँखें, हाथ उठाना, इधर–उधर देखना, निष्क्रिय मन, आँख – मिलाने से बचना) यह जानने का स्पष्ट सूचक होता है कि विद्यार्थी ने चर्चित अवधारणा को समझा है अथवा नहीं। अधिगम व्यवहार का अवलोकन, अधिगम क्रियाकलाप में शिक्षार्थी की रुचि और उसमें शिक्षार्थी के सम्मिलित होने के स्तर को ज्ञात करने की एक प्रभावशाली विधि है। सहयोगात्मक अधिगम विधि के अन्तर्गत विद्यार्थियों को छोटे-छोटे क्रियाकलाप समूहों में सम्मिलित कराके और उनकी प्रतिभागिता एवं सीखने के लिए सम्मिलित होने को गहराई से अवलोकित करके, इसे प्रभावशाली तरीके से किया जा सकता हैं। अवलोकन तालिका तैयार करना एक उपयोगी विधि है जिसका प्रयोग शिक्षक द्वारा सहयोगात्मक अधिगम क्रियाकलाप के दौरान विद्यार्थी के व्यवहार को रिकार्ड करने के लिए किया जा सकता है। शिक्षक को प्रत्येक समूह और समूह के प्रत्येक सदस्य का अवलोकन करने के लिए कुछ मिनट अवश्य देने चाहिए और तब गणित के जिस कार्य में विद्यार्थी सम्मिलित हैं, उसके लिए निम्नलिखत तालिका में उन सभी क्षणों को अवश्य रिकार्ड करना चाहिए जो विधार्थी की समझ, स्पष्टता, आत्मविश्वास, सृजनात्मकता, अन्तर्बोध और अभिप्रेरणा को प्रदर्शित करते हैं।

सुझावात्मक अवलोकन तालिका
(रेटिंग स्केल का प्रयोग करते हुए)

नाम:

कक्षा:

कार्य:

अधिगम व्यवहार	हमेशा	बार – बार	कभी – कभी	दुर्लभता से	कभी नहीं
सक्रिय श्रोता कार्य पर लगे रहना परिचर्चा शुरू करना प्रश्न पूछना अनुमान लगाना प्रश्न का उत्तर देना उत्तरों का औचित्य देना					

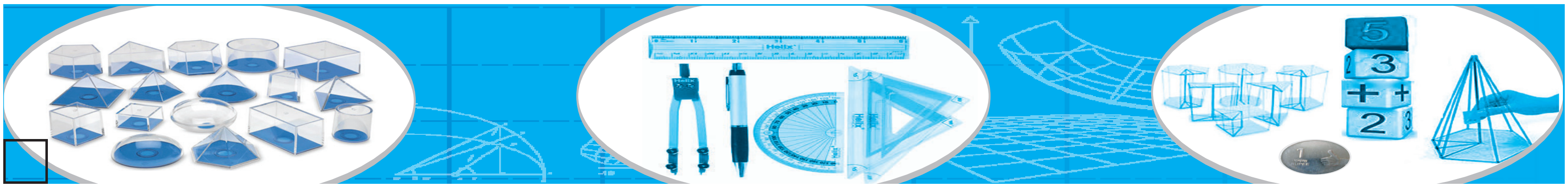
(B) प्रश्न पूछना

शिक्षण परिस्थितियों को विद्यार्थियों की समझ का स्तर मापने के लिए एक प्रभावशाली अनौपचारिक आकलन विधि के रूप में प्रयोग किया जा सकता है। पूछे जाने वाले प्रश्नों को समझ के निम्न स्तर से उच्च स्तर तक वर्गीकृत किया जा सकता है:

केवल स्मरण करना   अनुप्रयोग   विश्लेषण/ संश्लेषण

निम्न स्तर   मध्य स्तर   उच्च स्तर

← समझ का सांतत्यक →



शिक्षार्थी गणित के विषय में क्या सोचते हैं, गणित के विषय में क्या जानते हैं और गणित का प्रयोग किस प्रकार कर सकते हैं, इन सभी तथ्यों की समझ के सांतत्यक से प्रश्नों का क्रम निर्धारित किया जा सकता है। ये सुव्यवस्थित तरीके से चरणबद्ध किए गए प्रश्न विद्यार्थियों की प्रतिक्रियाओं को और अधिक संवाद, सहपाठी सहयोग और अन्य प्रकार के विस्तार के लिए प्रयोग करने हेतु, एक अच्छे साधन का कार्य करते हैं। गलत उत्तर दूसरे विद्यार्थियों द्वारा सुधारे जा सकते हैं और शिक्षक गलत उत्तर का निदान करने के लिए, जाँच - प्रश्न पूछ सकते हैं। सही उत्तर मिलने पर शिक्षक अगले स्तर के प्रश्न पूछ सकता है अथवा उसी प्रश्न का विस्तार कर सकता है।

प्रभावशाली प्रश्न पूछने के लिए स्मरणीय बिन्दु:

- प्रश्नों के विस्तृत प्रसार का प्रयोग करना
- प्रश्नों के विस्तृत स्तर का प्रयोग करना
- उपयुक्त प्रतिक्षा समय देना
- प्रश्नों को अनुप्रेषित करना
- सुरक्षित अधिगम वातावरण तैयार करना

ऐसी स्थिति पैदा नहीं होनी चाहिए, जहाँ केवल कुछ विद्यार्थी कक्षा पर छाए रहें और दूसरे अपने आपको वंचित समझें अथवा इसलिए शर्म महसूस करें कि उनको अपने उत्तरों पर भरोसा नहीं है। शिक्षक को प्रश्न सत्र पूर्णतया: लोकतांत्रिक और सहयोगात्मक तरीके से शुरू करना चाहिए, जहाँ प्रत्येक विद्यार्थी अपने आपको महत्वपूर्ण समझे और प्रत्येक प्रतिक्रिया सत्र को मूल्यवान बनाती हो। प्रश्न पूछने का उद्देश्य सही उत्तर प्राप्त करना नहीं है, अपितु विद्यार्थियों को ऐसे सभी संभावित उत्तरों पर पहुँचने के योग्य बनाना है, जो गणित की दृष्टि से ठीक हैं।

उदाहरण:

अधिगम सन्दर्भ : असहभाज्य संख्याएँ

प्रश्न 1. असहभाज्य संख्याएँ क्या होती हैं ?

प्रश्न 2. क्या दो क्रमागत संख्याओं का युग्म असहभाज्य होता हैं ?

प्रश्न 3. क्या असहभाज्य संख्याएँ हमेशा युग्म बनाती हैं ? (विस्तार – I)

प्रश्न 4. क्या असहभाज्य संख्याएँ सदैव क्रमागत युग्म बनाती हैं ? (विस्तार - II)

प्रश्न 5. यूक्लिड विभाजन एल्गोरिथ्म – विधि के प्रयोग से ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित संख्या युग्मों में से कौन असहभाज्य हैं ?

(i) 231, 396 (ii) 847, 2160 (अनुप्रयोग)

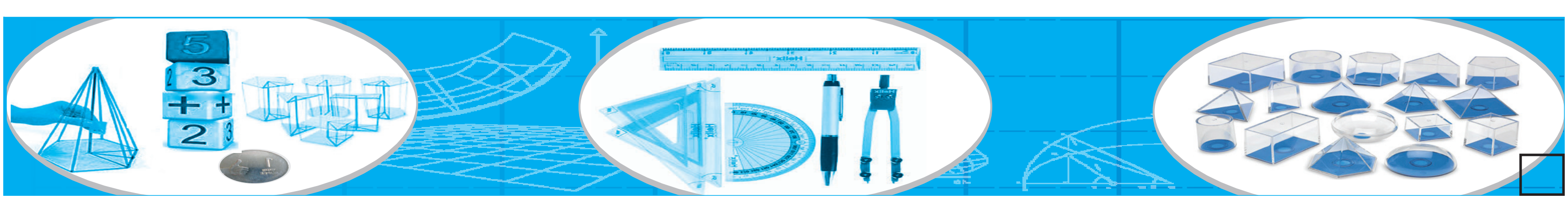
प्रश्न 6. एक असहभाज्य युग्म का सबसे बड़ा उभयनष्ठि गुणनखंड क्या होता है ? (विश्लेषण)

प्रश्न 7. क्या आप असहभाज्य युग्म ज्ञात करने के लिए किसी अन्य विधि का सुझाव दे सकते हैं? (सृजनात्मक)

(C) विद्यार्थियों के प्रश्न

' केवल एक सचेत मन ही प्रश्न पूछ सकता है'।

एक प्रेरित शिक्षार्थी केन्द्रित कक्षा में, शिक्षक को हमेशा अपने विद्यार्थियों को अपने सन्देह और प्रश्न उठाने के लिए प्रोत्साहित करना चाहिए। विद्यार्थियों द्वारा पूछे गए प्रश्न वह माध्यम है जिससे शिक्षक विद्यार्थियों की समझ और सन्देहों का एक साथ मापन कर सकता है। विद्यार्थियों द्वारा पूछे गए प्रश्नों के प्रकार एवं स्तर को जानकर और दूसरे विद्यार्थियों से प्रतिक्रिया प्राप्त



करने के लिए इन प्रश्नों के आधार पर कक्षा में चर्चा शुरू करके, शिक्षक रचनात्मक आकलन तैयार करने के लिए मूल्यवान सूचना प्राप्त कर सकता है।

उदाहरण:

अधिगम सन्दर्भ : द्विघात समीकरण

परिभाषा: चर x, का द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$

के रूप में होता है, जहाँ a, b, c वास्ताविक संख्याएं हैं और $a \neq 0$. है।

विद्यार्थियों द्वारा पूछे जाने वाले सम्भावित प्रश्न

प्रश्न: 1 क्या हम एक से अधिक चरों का द्विघात समीकरण लिख सकते हैं ?

प्रश्न: 2 यदि 'a' का मान ऋणात्मक हो, तो क्या होगा ?

प्रश्न: 3 यदि 'b' का मान शून्य (0) है, तो द्विघात समीकरण कैसा होगा ?

इस प्रकार के प्रश्नों से कक्षा में सक्रिय परिचर्चा और छान – बीन शुरू की जा सकती है। प्रश्नों को सहपाठी चर्चा के लिए अनुप्रेषित करना रचनात्मक आकलन की एक प्रभावशाली विधि है।

(D) छोटे समूह में व्यक्तिगत विचार – विमर्श

यह एक प्रामाणिक तथ्य है कि कुछ विद्यार्थी अध्यापक द्वारा निरन्तर प्रोत्साहित करने के पश्चात् भी कक्षा में शर्म अनुभव करते हैं और चर्चा में भाग नहीं लेते। विद्यार्थियों से व्यक्तिगत रूप अथवा छोटे समूह में मिलना बहुत ही प्रभावशाली है, क्योंकि विद्यार्थी स्वयं को महत्वपूर्ण समझते हैं और विचार- विमर्श करने के लिए अधिक आगे बढ़कर आते हैं। छोटे समूह में परिचर्चा कराना, एक सक्रिय प्रतिभागी के रूप में विद्यार्थी की योग्यता को जाँचने की एक प्रभावशाली विधि है। शिक्षक इस अवसर का, विद्यार्थी की गणित अधिगम की विशिष्ट आदतों का आकलन करने के लिए, प्रयोग कर सकता है, जिनके बारे में विद्यार्थी को और अधिक परामर्श दिया जा सकता है। इस प्रकार के विचार – विमर्श से शिक्षक विद्यार्थियों की गणित अधिगम की समस्याओं का निदान कर सकता है। इस प्रकार का विचार – विमर्श कक्षा में विविधता के मूल्य के लिए महत्वपूर्ण है।

इससे विद्यार्थियों के विशिष्ट अधिगम व्यवहार, व्यक्तिगत विचार, दृष्टिकोण एवं रुचियों की व्याख्या करने के अवसर प्राप्त होते है। विद्यार्थियों को कक्षा प्रक्रियाओं का विश्लेषण करने की अनुमति देने के लिए इसका प्रयोग किया जा सकता है।

शिक्षक द्वारा पूछे जाने वाले सम्भावित प्रश्न

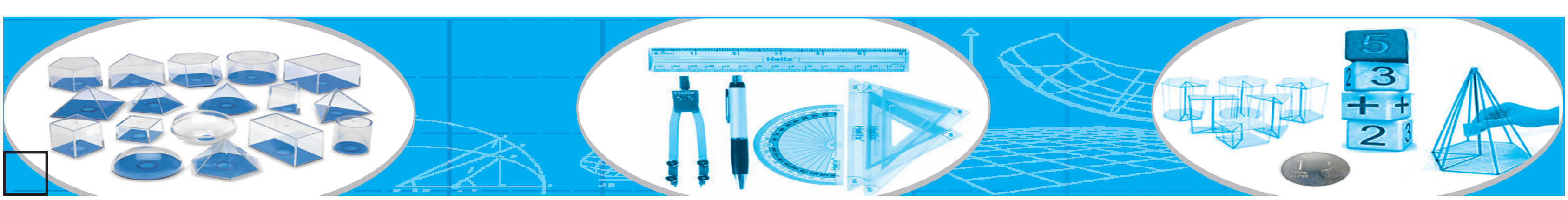
प्रश्न: 1 आप अपनी गणित कक्षा के विषय में क्या सोचते हैं ?

प्रश्न: 2 अभी हाल में पढ़ाये गए प्रकरणों में से किनमें आपने आनन्द अनुभव किया और किनमें आत्मविश्वास अनुभव करते हैं ?

प्रश्न: 3 कौन से प्रकरणों को आप कठिन अनुभव करते हैं ?

प्रश्न: 4 निम्नलिखित के विषय में लिखिए:

- आपकी प्रिय गणित समस्या
- आपकी कठिन गणित समस्या
- गणित में आपका सामर्थ्य
- गणित में आपकी कमजोरी



प्रश्न 5: गणित की कक्षा में आपको सबसे अच्छा क्या लगता है ?

- मानसिक गणित
- समस्या हल
- प्रमेय
- प्रोजेक्ट / क्रियाकलाप / प्रयोग
- समूह कार्य

(E) विषयवस्तु आधारित कार्य / कार्यशीट

रचनात्मक आकलन केवल तभी प्रभावशाली होता है जब शिक्षक अपने विद्यार्थियों को उनके अधिगम व्यवहार, अधिगम क्षमता, रुचि एवं व्यक्तिगत विश्वास के रूप में अच्छी तरह जानता हो। प्रत्येक विद्यार्थी की अधिगम आवश्यकताओं पर आधारित व्यक्तिगत कार्यशीट तैयार की जा सकती है। इस प्रकार की कार्यशीट जटिल एवं विभिन्न प्रकार के कार्यों के विकल्प के इर्द–गिर्द बनाई जा सकती है, जिससे विद्यार्थी कृत्रिमता के विभिन्न स्तरों पर उत्तर दे सकें। यदि विद्यार्थियों को अपनी योग्यता के उच्चतम स्तर पर प्रदर्शन करना है, तो जिन विधियों से उनका मूल्यांकन किया जा रहा है, वे विधियाँ उनको ऐसे अवसर प्रदान करती हों। आकलन परिणामों की व्याख्या करने के लिए, शिक्षार्थी के पूर्व ज्ञान, अनुभव और प्राप्त अवसरों का महत्वपूर्ण स्थान है।

8.3.2 संकलनात्मक आकलन

संकलनात्मक आकलन एक सत्र अथवा अध्ययन कोर्स के अंत में होता है। इसका उद्देश्य, एक निश्चित समय अवधि में अधिगम की मात्रा का मूल्यांकन करना, विद्यार्थी की प्रगति का सार प्रस्तुति करना और पाठ्यक्रम के उद्देश्यों से संबंधित अधिगम प्रगति के विषय में निर्णय करना है। पूर्णतया: रचनात्मक और पूर्णतया: संकलनात्मक आकलनों के मध्य सीमा रेखा खींचना कठिन है। यह मूल्यांकन के उद्देश्यों पर निर्भर करता है क्योंकि संकलनात्मक को, निर्णय लेने में अध्यापक की सहायता के लिए रचनात्मक रूप में भी प्रयोग किया जा सकता है।

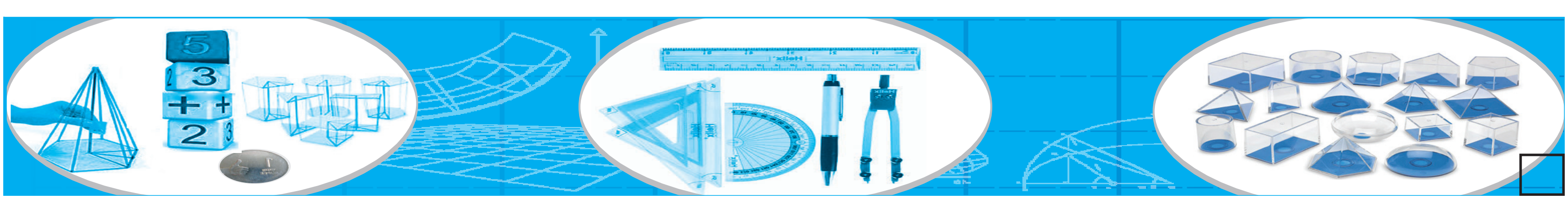
सैद्धान्तिक रूप में, संकलनात्मक आकलन का अर्थ है कि विद्यार्थियों का मूल्यांकन एक टेस्ट (परीक्षा) से किया जाएगा। वर्तमान में, संकलनात्मक आकलन में बड़े स्तर पर सुधार किए गए हैं। इन सुधारों में विभिन्न विधियों का प्रयोग सम्मिलित है, जैसे कि प्रदर्शन आधारित आकलन, टेस्ट पेपर, क्रियाकलाप आधारित प्रश्न, प्रोजेक्ट और विद्यार्थियों का पोर्टफोलियो।

प्रदर्शन आधारित आकलन

प्रदर्शन आधारित आकलन में विशिष्टत: या तो विद्यार्थी व्यक्तिगत रूप से प्रदर्शन करता है अथवा समस्या समाधान के कार्य के छोटे समूह में अथवा गणितीय संदर्भ की परिचर्चा मे अथवा गणितीय समय के किसी कार्य में, प्रदर्शन करता है। इसमें विद्यार्थी के निम्न पहलुओं का आकलन भी सम्मिलित है:

- गणितीय अवधारणाओं की समझ।
- गणितीय भाषा में संचारित करने की योग्यता।
- किसी अवधारणा के प्रासंगिक एवं अप्रासंगिक गुणों में अंतर करना।
- अवधारणाओं को विभिन्न विधियों से निरूपित करने की योग्यता।
- अवधारणाओं को अनेक संदर्भों में प्रयोग करने की योग्यता।
- गणितीय शब्दावली को स्पष्टता, सूक्ष्मता एवं उपयुक्तता के साथ प्रयोग करने की योग्यता।

प्रदर्शन आधारित आकलन एक सृजनात्मक विधि है, जिसके अन्तर्गत विद्यार्थी गणित को व्यवहारिक स्थितियों में प्रयोग करते हैं, 'गणित के विषय में सोचते हैं' और गणितीय संरचनाओं एवं प्रक्रियाओं पर चिन्तन करते हैं। प्रदर्शन आधारित आकलन की कुछ विशेषताएँ निम्नलिखित हैं:



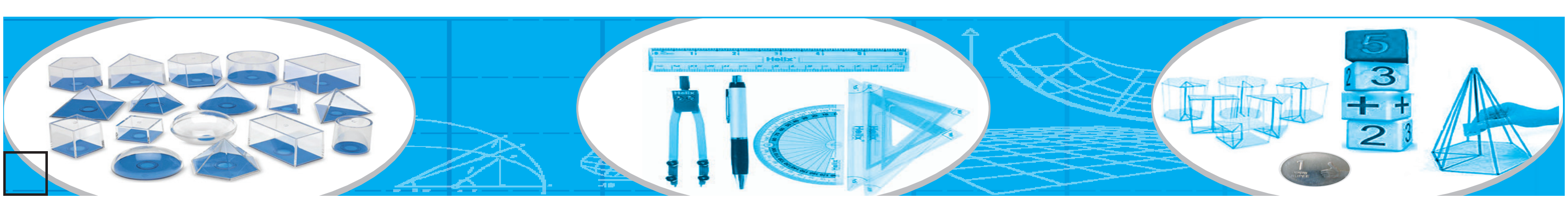
- विद्यार्थियों को वास्तविक संसार से अनुभव कराता है।
- कई दिनों तक चलने वाले दीर्घकालीन गणितीय कार्य में विद्यार्थियों को सम्मिलित करता है।
- गणित की अवधारणाओं को पृथक-पृथक समझने के स्थान पर इसकी सुसंगम एवं समग्रात्मक समझ पर ध्यान केन्द्रित करता है।
- सामान्यत: अनके गणितीय अवधारणाओं एवं प्रक्रियाओं को सम्मिलित करने वाला प्रसंग आधारित कार्य।
- गणितीय शब्दावली का सूक्ष्म, स्पष्ट और प्रभावी प्रयोग।
- विद्यार्थियों को प्रयोगीकरण, परीक्षण एवं परावर्तन के लिए प्रोत्साहित करना।
- गणित अधिगम के महत्वपूर्ण पहलुओं को परस्पर जोड़ने की योग्यता को बढ़ाना।

प्रदर्शन आधारित आकलन का परिणाम तैयार करने के लिए विषय – वस्तु, प्रक्रिया, संगठन, सृजनात्मकता और संचारण के मानकों पर आधारित सुपरिभाषित रूब्रिकों का प्रयोग किया जा सकता है।

कार्य: विभिन्न त्रिज्याओं एवं केन्द्रों के दस वृत्त बनाइए। प्रत्येक वृत के अन्दर एक दूसरे को समद्विभाजित करने वाली प्रतिच्छेदी जीवाओं का युग्म बनाइए। इस प्रकार निर्मित जीवाओं के विषय में टिप्पणी कीजिए। इस कार्य को निम्नलिखित रूब्रिक के प्रयोग से किया जा सकता है, जिसमें अनेक प्रदर्शन मानकों का प्रयोग किया गया है:

अर्थपूर्ण गणित अधिगम का आकलन एक सृजनात्मक प्रयास है। इस इकाई में हमने आकलन के अनेक पहलुओं का अन्वेषण किया है, जिनसे गणित शिक्षक को शिक्षण के प्रभावी होने और विद्यार्थियों के अधिगम के विषय में, वैध निर्णय लेने की शक्ति प्राप्त होती है।

मानक	**4**	**3**	**2**	**1**
विषय वस्तु की समझ	आकृतियों को उच्च स्तर की विशुद्धता से बनाया गया है और अच्छी तरह लेबल किया गया है।	अधिकतर आकृतियों को उच्च स्तर विशुद्धता से बनाया गया है और अच्छी तरह लेबल किया गया है।	अधिकतर आकृतियों को विशुद्धता से बनाया गया है और लेबल किया गया है।	कुछ आकृतियों को विशुद्धता से बनाया गया है और लेबल किया गया है।
सृजनात्मकता	आकृतियों को अत्यन्त विविध परिप्रेक्ष्य, मापन और प्रतिच्छेदन में बनाया गया है।	अधिकतर आकृतियों को विविध परिप्रेक्ष्य में बनाया गया है।	कुछ आकृतियों को विविध परिप्रेक्ष्य में बनाया गया हैं।	आकृतियों को सामान्य तरीके से बनाया गया है।
संगठन	समस्त संबद्ध सूचना निष्कर्ष पर पहुँचने के लिए सुव्यवस्थित तरीके से संगठित है।	अधिकतर सूचना सुव्यवस्थित तरीके से संगठित है।	कुछ सूचना सुव्यवस्थित तरीके से संगठित है।	सूचना असंगठित है और अव्यवस्थित दिखाई देती है।
प्रक्रिया	समस्त संबद्ध सूचना को विश्लेषण, सामान्यीकरण और संश्लेषण में प्रयोग किया गया है।	अधिकतर सूचना विश्लेषण सामान्यीकरण और संश्लेषण की प्रक्रिया में प्रयोग किया गया है।	केवल आंशिक सूचना को विश्लेषण, सामान्यीकरण और संश्लेषण की प्रक्रिया में प्रयोग किया गया है।	विश्लेषण, सामान्यीकरण और संश्लेषण की प्रक्रिया में गंभीर त्रुटियाँ हैं।
संचारण	सूक्ष्म और उपयुक्त गणित शब्दावली के प्रयोग से वैध निष्कर्ष निकाले जाते हैं।	गणित शब्दावली के प्रयोग से वैध निष्कर्ष निकाले जाते हैं।	मुख्यत: गणित शब्दावली के प्रयोग से उचित निष्कर्ष निकाले जाते हैं।	अपूर्ण अथवा अनुपयुक्त निष्कर्ष निकाले जाते हैं और मनमाने ढंग से गणित शब्दावली का प्रयोग किया गया है।



8.4 शिक्षकों के लिए अधिगम प्रश्नावली

1. सतत् एवं व्यापक आकलन युक्ति के महत्वपूर्ण घटक क्या हैं ?
2. माध्यमिक गणित पाठ्यपुस्तक से कक्षा IX / X की एक इकाई से चयन कीजिए और एक रचनात्मक आकलन योजना तैयार कीजिए।
3. प्रदर्शन आधारित आकलन, पारंपरिक संकलनात्मक आकलन विधियों से किस प्रकार भिन्न है ?
4. एक ऐसी स्थिति की योजना तैयार कीजिए, जहाँ संकलनात्मक आकलन को रचनात्मक आकलन के रूप में प्रयोग किया जा सकता है।
5. प्रदर्शन आधारित आकलन के लिए एक प्रभावशाली रूब्रिक की योजना तैयार कीजिए। स्पष्टीकरण के रूप में एक उपयुक्त उदाहरण का प्रयोग कीजिए।
6. संख्या पद्धति / सांख्यिकी से एक अर्थपूर्ण समूह क्रियाकलाप तैयार कीजिए। रेटिंग स्केल के प्रयोग से एक ऐसी प्रभावशाली अवलोकन तालिका तैयार कीजिए जिसे क्रियाकलाप के दौरान शिक्षक द्वारा प्रयोग किया जा सके।
7. अपनी पसंद के किसी उचित प्रकरण से, समझ के सांतत्यक के विभिन्न स्तरों के लिए, प्रश्नों की एक श्रृंखला तैयार कीजिए।